

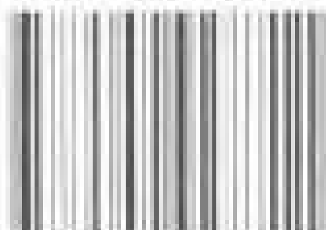
广义相对论和宇宙学的物理基础

李 复/编著

气象出版社

广义相对论和宇宙学的物理基础





ISBN 7-5029-2871-5

9 787502 928711 >

ISBN 7-5029-2871-5/O · 0068

定价：15.00 元

广义相对论和宇宙学的物理基础

李 复 编著

气象出版社

图书在版编目(CIP)数据

广义相对论和宇宙学的物理基础/李复编著.-北京:气象出版社,2000.2

ISBN 7-5029-2871-5

Ⅰ.广… Ⅱ.李… Ⅲ.①广义相对论 ②宇宙学-相对论 Ⅳ.O412.1

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第76246号

气象出版社出版发行

(北京西郊白石桥路46号 邮编:100081)

责任编辑:郭彩丽 终审:周诗健

封面设计:曾金星 责任技编:都 平 责任校对:时 人

*

北京东光印刷厂印刷

开本:787×1092 1/32 印张:7.5 字数:158.7千字

2000年2月第一版 2000年2月第一次印刷

印数:1—800 定价:15.00元

前　言

岁月流逝，每个人在各自的人生舞台上都演出一幕幕的生活话剧，也都会对无情的流逝岁月和丰富多彩的活动舞台有无限的感慨和深刻的体会。牛顿的绝对时空观很容易被人们接受，因为它与人们的日常生活体验相符合。但是狭义相对论告诉人们，绝对时空观并不正确。学了狭义相对论后人们惊奇地发现，时间间隔和空间尺度的测量由于相对运动而结果不同，即运动的时钟变慢、运动的长度缩短。尽管日常生活中这种效应微乎其微，人们感觉不到，但是这种效应确实是存在的。这是一种崭新的时空观，是对时间和空间本质认识的深化。但是关于时间和空间的更深入、更严格的理论是广义相对论。广义相对论指出，时间和空间不是原来就有的为物质的活动预先准备好的舞台，而是与物质紧密联系在一起共同产生的，大质量物体的引力造成空间弯曲和时间变慢……这些新奇的几乎不可思议的时空的特性，引起人们极大的兴趣。同样引起人们极大兴趣的是宇宙。当人们仰望星空，面对无边无际的苍茫宇宙，人们所知甚少，既对宇宙无比敬畏和仰慕，又对宇宙产生无尽的遐想，心中充满了有关宇宙构成、诞生、发展和演化的问题。相对于宇宙之宏大，我们居住的地球不过像是茫茫宇宙中的一粒尘埃；相对于宇宙之久长，我们人类的历史不过是宇宙年轮上一道小小的刻痕。但是我们的想象，我们的思维可以遨游宇宙，纵横宇宙的过去和未来。

人们想了解和学习广义相对论和宇宙学，还不仅是因为对它们有兴趣。相对论是现代物理学两种基本理论之一，广义相对论是相对论中重要的和基本的内容，它建立起时间、空间，物质及其运动之间的内在联系，它所阐明的最广泛的一切物理规律都必须满足的广义相对性原理，完满地解决了经典引力问题。支配宇宙的力正是引力，广义相对论成为现代宇宙学的理论基础。从广义相对论诞生起，宇宙学从思辩进入科学研究，成为物理学一个重要的分支。从60年代到70年代起，以大爆炸为基础的现代宇宙学飞速发展，汇聚了各个学科的研究成果，也给各个学科提出许多问题，成为自然科学的前沿。宇宙学知识已成为自然科学的基础。杨振宁博士说，21世纪的前沿科学将是生物物理、纳米物理和宇宙学。因此，学习和掌握广义相对论和宇宙学的基本知识，不单单是简单的凭兴趣出发对一门科学知识的了解，而且也是正确的世界观的科学基础，是当代有知识有文化的人们的基本科学素养。

但是当人们翻开广义相对论教材，都是先讲授张量及张量微积分等数学，然后用这些数学工具去深入地研究广义相对论理论。对于那些只想了解广义相对论的基本原理和初步入门知识的人们，这些繁复艰深的微分几何像一道无法逾越的墙，横在面前挡住去路，使人们望而却步。

本书是作者将广义相对论普通物理化的产物，除个别概念外完全避开艰深的数学，只利用普通的微积分，以大学物理的风格、语言和难易程度，系统、严谨地讲授广义相对论和宇宙学的最基本的入门知识和内容，着重于物理原理、物理思想和重要的物理概念，在不用微分几何的情况下，尽可能准确、清晰地介绍广义相对论的物理基础，定量地、完整地讨论广义相对论的经典检验和效应，并与牛顿力学比较，指出与牛顿力

学的近似程度。在广义相对论的基础上，从宇宙学的基本原理出发，介绍大爆炸宇宙学对宇宙的诞生、演化和未来的讨论。

本书前面加上狭义相对论简介作为第1章，出于三个方面的考虑，首先，相对论是完整的理论，狭义相对论是其必要的、基础的内容。其次，我们对广义相对论的讨论是在狭义相对论的基础上进行的，而有些读者没有学过狭义相对论，或者虽然学过但对讨论广义相对论所需内容没有学全，有了这一章，就为读者前后照应提供方便。第三，该章与通常大学物理教材中狭义相对论的内容有区别：相对性原理、时空本性的讨论有所加强，洛伦兹变换的推导、相对论动力学和闵可夫斯基空间等内容及其讲法上与通常教材有所不同，而通常教材中详加讨论之处这里有所减弱或省略，这样，学过通常狭义相对论教材的人们通过阅读本章也会有所收获。

本书强调物理本质、物理图像，力求叙述严谨，与大学物理的其他部分具有有机的联系，主要内容都是从基本原理出发推导的；以时空为主，涉及广义相对论、宇宙学的一些基本内容，适应不同水平、不同兴趣读者的要求；内容由浅入深，详细讲解，适于自学。具有高中文化程度的读者可以看懂时空等基本内容，具有大学物理力学和微积分基础知识的读者可看懂书中几乎全部内容。所有对广义相对论、宇宙学感兴趣的具有大学文化水平的读者都可以读懂全书。

最后需要说明的是，本书并不是简单的科普读物，可以轻松地一看而过。要想了解和掌握书中所讲内容，需要像学习一门课程一样下一番功夫。此外，如果有人立志要投身到广义相对论的深入研究中去，微分几何的知识是必不可少的。

李　复

1999 年 7 月

目　　录

第 1 章　狭义相对论简介

1.1　狭义相对论的基本原理

1.1.1　古典力学时空观、力学相对性原理

力学的研究对象活动在时空里，因此力学首先要回答时空是什么样的问题。古典力学认为，空间和时间彼此无关，相互独立。空间是物质活动的舞台，时间是物质活动的旁观者和活动历程的记录员，它们都与物质无关。物体的长度和时间间隔大小都是绝对的。这种时空观又称之为绝对时空观或古典时空观。

经典力学的力学定律只在惯性系才成立。惯性系不止一个，相对某惯性系作匀速直线运动的所有参考系都是惯性系。

与古典时空观相对应的惯性系之间的坐标变换是伽利略变换，见图 1.1.1。其中坐标系 $oxyz$ 代表静止参考系 S，坐标系 $o'x'y'z'$ 代表运动参考系 S'，S' 系相对 S 系以匀速率 u 沿 x 轴正方向运动。当然运动与静止是相对的，上面称 S 系为静止参考系、S' 系为运动参考系是习惯的称呼。取两系原点重合时刻为 $t=t'=0$。显然，按古典时空观两系的时间是相等的：

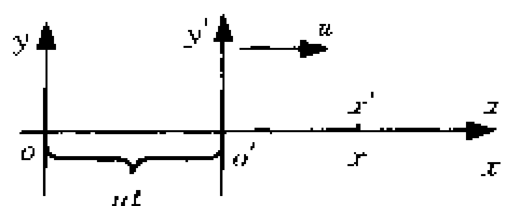


图 1.1.1　伽利略坐标变换

$$t = t' \tag{1.1.1}$$

设 P 为空间中任意点，在两系中坐标分别为 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$，由于长度不因参考系的不同而改变，故：

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - ut \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}\right\} \tag{1.1.2}$$

这就是伽利略坐标变换。写成矢量形式，设 $\boldsymbol{R}$ 为 o' 的位置矢量：

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{R} \tag{1.1.3}$$

由坐标变换可以得到速度和加速度变换：

$$v_x' = v_x - u, \quad v_y' = v_y, \quad v_z' = v_z \tag{1.1.4}$$

$$a_x' = a_x, \quad a_y' = a_y, \quad a_z' = a_z \tag{1.1.5}$$

写成矢量形式：

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' - \boldsymbol{u} \tag{1.1.6}$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' \tag{1.1.7}$$

惯性系不止一个的事实，说明力学定律不是只在一个参考系成立，而是在无数的参考系都成立。也就是说，这无数个参考系(惯性系)在力学上都是平等的。如果我们在某一个惯性系中做任何力学实验，都无法发现这个惯性系与其他惯性系有什么本质上的不同。学习牛顿力学的人都知道这个事实，但是很多人不知道这个事实实际上体现了力学的重要规律——力学相对性原理，又称伽利略相对性原理。

力学规律可以用数学表达式来定量描述，所以力学相对性原理就体现在力学规律的数学表达式在各个惯性系形式相同。因此可以换个角度讨论相对性原理：力学规律所以能满足相对性原理，是因为代表力学规律的牛顿定律在各个惯性系的形式都相同，或者说在伽利略变换下保持不变。这样我们就可以从数学上严格讨论某个物理规律是否满足相对性原理。

由古典时空观得到惯性系之间的伽利略坐标变换；而牛顿定律在伽利略变换下保持不变，表明整个经典力学都满足相对性原理。经典力学体系与古典时空观相互呼应，和谐统一。

在16世纪末到17世纪初伽利略首先讨论相对性原理时，主要自然科学为力学。随后，力学又被牛顿发展到经典力学的高峰——牛顿定律和万有引力定律，所以讨论的只是力学对惯性系的平权，即力学相对性原理。不过人们并不怀疑，如果出现新的物理规律，它应该也满足相对性原理。200多年后，考验相对性原理的时候到了：电磁学理论诞生了。

1.1.2 电磁理论引起的困惑

1860年，麦克斯韦总结电磁场的基本规律，得到描述电磁场运动、变化的微分方程组——麦克斯韦方程组，建立起完整的经典电磁理论，麦克斯韦方程组是整个经典电磁学的理论基础。电磁理论建立后，有很多科学家如H.赫兹和H.A.洛伦兹研究电磁场定律是否满足相对性原理。讨论的思路是要建立电磁学各物理量在伽利略变换下的变换规律，从而决定在新的坐标系中这些物理量是否还服从同样形式的麦克斯韦方程组。结果出人意料：麦克斯韦方程组没有伽利略变换下的协变性，也就是说在经典的时空观及相应的惯性系之间的伽利略变换下，电磁学不满足相对性原理。要说明这一点，不必去完整地讨论麦克斯韦方程组的协变性，只需要简单地讨论由麦克斯韦方程组得到的重要结论——一个电磁学的定律——光在真空中传播定律（爱因斯坦曾说[①]："物理学中几乎没有比这个定律更简单的定律了。"）：光在真空中的光速为常数 c，与传播方向、光源的运动无关，与惯性系的选择无关。这

---

① 爱因斯坦，狭义与广义相对论浅说，上海科学技术出版社(1964).

显然不符合伽利略变换。在伽利略坐标变换下，速度的变换关系为(1.1.6)式。按此关系，设光速在 S 系中为 c，则在相对 S 系以 u 运动的 S' 系中为

$$c' = c - u$$

即在不同的惯性系中观测光的速度大小、方向都不同，而且所测速度大小与光的传播方向有关，即光速不再是各向同性了。例如，若 u 与 c 同向时，光速大小为 $c'=c-u$；若 u 与 c 反向时，光速大小为 $c'=c+u$。是电磁理论错了？还是电磁理论只在某一特殊惯性系才成立，即电磁理论不满足相对性原理？著名的迈克尔逊-莫雷(Michelson-Morley)的光波干涉实验[①](迈克尔逊在 1881 年、迈克尔逊和莫雷一起在 1887 年做的实验)明确无误地证实，在地球上真空中光速是与方向无关的常数。这个实验和其他有关的实验结果摆在了所有人们的面前，包括当时最有名望的大科学家的面前，但只有年轻的、名不见经传的爱因斯坦给出了正确的解答，并由此建立起狭义相对论。

1.1.3 爱因斯坦相对性原理与光速不变原理——狭义相对论的基本原理

经典力学的辉煌使人们相信，“一切物理事件都要追溯到那些服从牛顿运动定律的物体，这只要把力的定律扩充，使之适应于被考查的情况就可以了。”牛顿力学“并不限于为实际的力学科学创造了一个可用的和逻辑上令人满意的基础；而且直到 19 世纪末，它一直是理论物理学领域中每个工作者的纲领。”[②]受此束缚，人们看到的是光速不变原理与力学相对

---

① 一般物理学教材对此实验都有介绍，如郑永令、贾起民，普通物理学教材——力学，复旦大学出版社(1990)。

② 许良英等编译，爱因斯坦文集(一)，商务印书馆(1977)。

性原理的矛盾和不容；在旧框架内所做的种种解释和修改都不能从根本上解决问题，于是一些人甚至要否定相对性原理，认为只有力学规律才满足相对性原理，而电磁学不满足相对性原理。爱因斯坦不迷信权威，善于怀疑、独立思想、敢于创新，对神圣的科学知识大厦采取极其严峻的批判态度，其他人往往愿意作为事实接受下来的东西，在他看来似乎是难以置信的。他幽默地说过："为了惩罚我蔑视权威，命运竟使我自己成为一个权威。"他称自己"是一个离经叛道的和梦想的人"。[1]正是这种对传统的无情批判和对真理的不断追求，使他大胆创新提出了狭义相对论。

他分析了所有的实验事实后认为，它们已确切无疑地证实电磁理论、真空光速不变原理是正确的，满足相对性原理，错误的是经典力学，古典时空观。

他提出两条基本假设作为狭义相对论的基础：

(1)狭义相对性原理(又称为爱因斯坦相对性原理)：一切物理规律对所有惯性系都相同，不存在任何一个特殊的惯性系。

(2)光速不变原理：在任何惯性系中，光在真空中的速度都相同，皆为数值 c。

与这两条假设对应的是新的时空观；相应的惯性系之间的坐标变换为洛伦兹变换；电磁学理论具有洛伦兹变换下的协变性，即满足狭义相对性原理，而牛顿力学在洛伦兹变换下不协变，不满足狭义相对性原理，必须加以修改。

狭义相对性原理在狭义相对论中起着最基本的至关重要的作用，是狭义相对论的奠基石。

---

[1] 许良英等编译，爱因斯坦文集(三)，商务印书馆(1979)。

力学相对性原理和狭义相对性原理讨论的都是惯性系中自然规律的形式是否与惯性系的选取有关，但前者认为只有力学规律才与惯性系的选择无关，后者认为一切物理规律都与惯性系无关，也就是说一切物理规律都满足相对性原理。狭义相对性原理把力学相对性原理进一步发展了，指出物理规律所满足的变换规律。反过来，狭义相对性原理也对一切物理定律加上限制条件，即一切正确的物理定律必须与惯性系的选取无关，在惯性系的坐标变换下形式不变。已有的不满足狭义相对性原理的牛顿定律要加以修正，一切新发现的、新建立的物理定律首先必须满足狭义相对性原理。

下面直接由狭义相对论的基本原理讨论狭义相对论的时空观。

1.1.4 同时性的相对性——相对论时空观的精髓

相对性原理以及电磁学理论（在这里体现为光在真空中的传播定律，即光速不变原理）满足相对性原理，使我们确立了与古典的绝对时空观不同的全新的时空观。相对论的中心是相对性原理，相对性原理的核心是相对性观点，1948 年，爱因斯坦为《美国人民百科全书》写了一个关于相对论的条目，标题为“相对性：相对论的本质”。在新的狭义相对论的时空观中，时间、空间、运动彼此联系，都是相对的，没有绝对的运动、绝对的时间和空间。

爱因斯坦指出，**时间的概念来自同时性**。在古典时空观中，时间与参考系无关，与运动无关，是绝对的，因此同时性是绝对的，即在某一参考系观测是同时发生的两个事件，在其他参考系观测也必然同时。在狭义相对论时空观中，同时性是相对的，即在某一参考系观测是同时发生的两个事件，在其他参考系观测可以不同时，同时性的相对性是狭义相对论时空观

的精髓，是理解时间、空间、运动的相对性的关键。

由光速不变原理，通过合理的推论，立刻就可了解同时性的相对性，见图 1.1.2。S' 系相对 S 系以匀速向右运动，光源 M' 和接收点 A_1'、A_2' 固定在 S' 系中。在 S' 系测量，A_1'、A_2' 到 M' 距离相等，即 $A_1'M'=A_2'M'$。设某时刻 M' 向四面八方发光，则在 S' 系观察，A_1'、A_2' 必然同时接收到光信号。把 A_1'、A_2' 收到光信号分别称为事件 1、2，那么在 S' 系看来事件 1、2 同时发生。

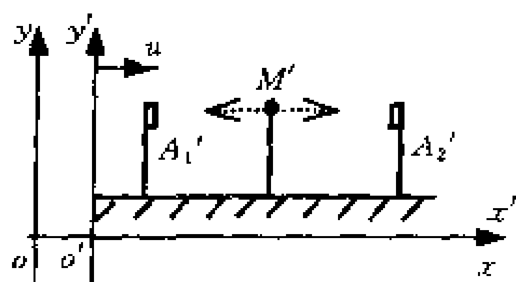


图 1.1.2

在 S 系观测处于运动状态下的光源和接收点之间的距离，我们现在还不能确定 A_1'、A_2' 到 M' 距离是否等于静止状态下的相应距离(即 S' 系测量的结果)，但从 S' 系中 $A_1'M'=A_2'M'$，我们至少可以断定在 S 系中测量 A_1'、A_2' 到 M' 的距离也相等，因为这二段长度的地位是平等的。这样，我们在 S 系中考察 M' 发光及 A_1'、A_2' 接收的过程，在 M' 发光时 A_1'、A_2' 到光源距离相等，光一旦发出，就以同样的速度向左、右传播，与 M' 不再有任何关系，而 A_1' 是迎着光波前进，A_2' 是背离光波运动，显然 A_1' 先收到光信号，A_2' 后收到光信号。于是在 S' 系看来是同时发生的两事件，在 S 系看就不再是同时发生的事件，这就是同时性的相对性。当然，如果在同一地点发生的两事件，或是 x 坐标相同的两地点发生的两事件，如果在一个参考系看是同时的，那么在所有参考系看也是同时的。

由于同时性具有相对性，所以时间以及时间间隔也就都具有相对性，时间不再是绝对的与空间和运动无关的了，而是与空间紧密联系。我们必须把时间和空间合在一起构成不可

分开的四维坐标(时空坐标)来表示一个"位置"或一个"点"。为了与通常所说的代表三维纯空间坐标中的"点"区别开,称四维时空中的点为"世界点",质点在四维时空中的轨迹称为"世界线"。通常,我们还形象地称世界点为事件,事件发生的时间就是世界点的时间坐标,事件发生的地点就是世界点的纯空间坐标。

下面讨论对运动长度的测量,仍然考虑图 1.1.2 的例子,在 S 系中测 M' 与 A_1' 的距离。合理的可行的方法,是在某一时刻同时测 M'、A_1' 的 x 坐标 X_M 和 $X_{A'}$,则两坐标之差即为 S 系中测的 M' 与 A_1' 距离。由于同时性的相对性,在其他惯性系如 S' 系中认为 S 系的测量并不同时,所以 S 系测的距离不等于 S' 系测的距离,这样长度即空间间隔的测量也是相对的。但是,因为 x 坐标相同的两地点发生的两事件的同时性与惯性系无关,所以垂直于 x 轴(即垂直于 S' 系运动方向)的长度测量也就与参考系无关。

下面讨论"超距作用"问题。所谓"超距作用",是认为相隔一段距离的两个物体,它们之间的相互作用可以超越这段空间距离同时产生,不需要传递时间。由此看来"超距作用"有两个前提:(1)同时性是绝对的;(2)作用的传递不需要时间。这两个要求或条件在古典时空观和经典力学中完全可以实现。在经典电磁学中,传统的超距作用遇到困难,因为电磁场以光速传播,这样电磁作用的传递需要时间,电磁学为了避免超距作用,引入电磁场概念,两个电荷之间的作用不再是超距作用,而是甲电荷在乙电荷所在地的场与乙电荷作用,即当地的场对当地电荷的作用。狭义相对论提出同时性的相对性,而且指出任何作用的速度不能大于光速,于是彻底去掉了"超距作用"赖以生存的两个条件,在整个物理学领域中彻底破除了超距作用。

1.2 洛伦兹坐标变换

狭义相对性原理与力学相对性原理的区别，不仅在于它将满足相对性原理的自然规律从力学定律推广为一切物理定律，还在于它所确定的惯性系之间的坐标变换不是伽利略的而是洛伦兹的。实际上在爱因斯坦提出狭义相对论之前，为了解释迈克尔逊-莫雷实验，洛伦兹(Lorentz，H. A.，1853～1928)已经提出了洛伦兹变换，假定运动的尺沿运动方向收缩。但他没有意识到这意味着新的时空观，只当做表观的想象的时间和长度，将洛伦兹变换仅仅作为纯数学技巧而没有真实的物理意义。爱因斯坦通过深刻的思考，大胆假定洛伦兹变换表达空间和时间的真实联系，正好是狭义相对性原理要求的惯性系之间的变换。

1.2.1 洛伦兹坐标变换

洛伦兹坐标变换给出同一世界点在不同惯性系之间的坐标关系。在合理假设的基础上，由狭义相对论的基本原理可以引出洛伦兹变换。规定S、S'坐标系如图1.1.1，并且取两坐标系原点O、O'重合时分别为两坐标系的时间原点：$t=t'=0$。

由狭义相对性原理，各个惯性系应该是平等的。惯性系之间的坐标变换应该体现这种平等，应该保持空间的均匀性和各向同性，应该保持线性微分方程的线性，因此这种变换必然是线性的，这是基于相对性原理的合理的假设。t时刻S'系原点O'在S'系和S系坐标分别是$x_{o'}'=0$和$x_{o'}=ut$，于是可设第一个变换方程为

$$x'=\gamma(x-ut) \qquad (1.2.1)$$

其中γ为待定常数。(1.2.1)式的形式既满足了线性变换要求，又确保了O'在两个参考系坐标的关系。用类似的方法，t'

时刻 S 系原点 O 在 S 系和 S' 系坐标分别是 $x_o=0$ 和 $x_o'=-ut'$，于是可设 $x=\gamma'(x'+ut')$。由相对性原理，S、S' 系平等，S 系相对 S' 系以 $-u$ 运动，所以应有 $\gamma'=\gamma$，即

$$x = \gamma(x' + ut') \tag{1.2.2}$$

由(1.2.2)式得 $t'=(\gamma^{-1}x-x')/u$。将(1.2.1)代入得：

$$t' = \gamma[t - (1 - \gamma^{-2})x/u] \tag{1.2.3}$$

再由前面讨论，垂直于运动方向(即 x 轴方向)的长度测量与坐标系无关，所以

$$\left.\begin{aligned} y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}\right\} \tag{1.2.4}$$

这样，由相对性原理推出线性变换的合理假设，从而得到(1.2.1)～(1.2.4)代表的惯性系之间的坐标变换，γ 取不同的数值对应着不同的变换，它们可以满足不同的“相对性原理”，例如 $\gamma=1$ 时即为伽利略坐标变换，满足力学相对性原理。附加上狭义相对论的第二个基本原理——光速不变原理就可以确定 γ，得到满足狭义相对论的洛伦兹变换。

设 $t=t'=0$ 时刻原点发光，横轴上某人接受到光信号为一事件，该事件在 S、S' 系坐标分别为(x,t)和(x',t')，由于在 S、S' 系光速皆为 c，则有关系：

$$\left.\begin{aligned} x &= ct \\ x' &= ct' \end{aligned}\right\} \tag{1.2.5}$$

将(1.2.5)式分别代入(1.2.1)和(1.2.2)式，将得

$$x'=\gamma(c-u)t=ct' \text{ 和 } x=\gamma(c+u)t'=ct$$

将此二式相乘，消去 t 和 t'，得到

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{1.2.6}$$

显然 $\gamma>1$。于是得到洛伦兹坐标(正)变换：

$$\left.\begin{aligned}
x' &= \gamma(x - ut) = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\
y' &= y \\
z' &= z \\
t' &= \gamma\left(t - \frac{ux}{c^2}\right) = \frac{t - \dfrac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}
\end{aligned}\right\} \tag{1.2.7}$$

将 u 换成 $-u$ 即得洛伦兹坐标逆变换：

$$\left.\begin{aligned}
x &= \gamma(x' + ut') = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\
y &= y' \\
z &= z' \\
t &= \gamma\left(t' + \frac{ux'}{c^2}\right) = \frac{t' + \dfrac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}
\end{aligned}\right\} \tag{1.2.8}$$

由洛伦兹变换知道，时间与空间密切相关，互相连系、互相影响，当 $u/c \to 0$ 时 $\gamma \to 1$，洛伦兹变换趋于伽利略变换，说明牛顿力学是狭义相对论在低速下的近似。由(1.2.6)式知道 $u < c$，即惯性系的速度亦即实体的速度（坐标系必须建立在实体上），必须小于真空光速。

在确立了与狭义相对论相对应的洛伦兹变换之后，狭义相对性原理可以更明确地表述为：物理定律对洛伦兹变换协变。实际上这个表述意义更深刻。我们回顾以上的讨论及洛伦兹变换的推导过程，就会发现，狭义相对论的基本原理两个公设可以集中为一条公设：物理定律对洛伦兹变换协变。狭义相对论的全部内容都来自或包括在这条公设中，1.1.3 节所述的相对性原理对物理定律的限制，也就是这条公设所明确表达出的限制，它以一种确定的方式限定了所有自然规

律，可以与热力学第二定律对热力学过程的限制相比拟，而又比后者更广泛、更全面。

洛伦兹变换代表了一种与古典时空观不同的新的时空观，表示在不同惯性系对同样两事件的时间间隔、空间距离的测量是不同的，即时间、长度具有相对性。下面分析它所代表的时空观。

1.2.2 同时性的相对性与时序

设有 1、2 两事件，1 事件在 S、S' 系坐标为 $(\boldsymbol{r}_1, t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_1', t_1')$；2 事件在 S、S' 系坐标为 $(\boldsymbol{r}_2, t_2)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2', t_2')$。令 $\Delta t = t_2 - t_1$，$\Delta t' = t_2' - t_1'$，$\Delta x = x_2 - x_1$。

(1)若在 S 系中 1、2 两事件同时，即 $t_2 = t_1$，$\Delta t = 0$，于是在 S' 系中

$$\Delta t' = -\gamma u(x_2 - x_1)/c^2 \tag{1.2.9}$$

这样如果 $x_1 = x_2$ 那么 $\Delta t' = 0$，1、2 事件也同时；如果 $x_1 \neq x_2$，那么 $\Delta t' \neq 0$，1、2 事件不同时，这就是同时性的相对性，即如果 x 坐标不同的两事件在 S 系同时的话，在其他惯性系都不同时。

(2)若在 S 系中 1、2 两事件不同时，在时间上有先后顺序，简称时序，且设 1 事件先发生，2 事件后发生，即 $t_2 > t_1$，$\Delta t > 0$。于是 S' 系有：

$$\begin{aligned}\Delta t' &= \gamma[\Delta t - u(x_2 - x_1)/c^2] \\ &= \gamma\left(1 - \frac{u}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)\Delta t\end{aligned} \tag{1.2.10}$$

如果 1、2 两事件没有因果关系，即互不相关，例如是在两地开两个无关的会议，那么 Δx 与 Δt 没有关联，$\Delta x/\Delta t$ 可能取任意值，相应地 $\Delta t'$ 可以大于、等于、小于零。当 $\Delta t' > 0$ 时，时序不变；当 $\Delta t' < 0$ 时时序颠倒。由于两事件无因果关系，时

序颠倒是允许的，不会产生矛盾。

如果 1、2 两事件有因果关系，即两事件有内在联系，时序就不应该颠倒，例如某人先参加会议 1 的开幕式（即事件 1），随后又到另一地参加会议 2 的开幕式（即事件 2）；又如警察开枪（事件 1）在先，罪犯中弹（事件 2）在后；再如人诞生（事件 1）在先，年老死亡（事件 2）在后；……对于这类有因果关系的两事件，在两事件之间有一定的联系，体现在两地的某种"沟通"或是连带关系的传播，如例 1 中某人的旅行，例 2 中子弹的飞行……这种传播速度必小于 c，这样 $\left|\frac{\Delta x}{\Delta t}\right|$ 小于等于传播速度，于是也小于 c，又由前面知 $u<c$，所以 $\left(1-\frac{u}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)>0$，于是 $\Delta t'>0$，这样在狭义相对论中，有因果关系的事件之间时序不会颠倒。

1.2.3 运动时钟变慢和运动长度缩短

没有"超距"作用，更没有"超距"测量，测量必须在事件发生地当地当时进行，为此要在整个坐标系中每一点建立时间、长度标准，即放置时钟和尺子。在同一坐标系中时钟都是校准过的，在同一时刻它们的读数都相同。但是在同一时刻观察其他坐标系的时钟，读数都不相同，例如在 S 系中 $t=0$ 时刻 x 轴上不同地点观察者同时观察 S' 系中相应地点的时钟，其结果由（1.2.7）式取 $t=0$ 得到：$t'=-\gamma ux/c^2$，t' 就是 $t=0$ 时刻 x 坐标处 S' 系时钟的读数，读数与 x 坐标有关，各不相同。由此我们已经感到，S 系看 S' 系时钟的走时快慢肯定与 S 系自身时钟走时快慢不同。

下面用对表方法找到两系时钟走时快慢关系。在 S 系中分别用 A_1、A_2 两时钟与 S' 系中时钟 A' 对表。先是 A_1、A' 钟相遇（事件 1，见图 1.2.1（1）），两钟读数分别为 t_1、t_1'，空间横坐

标分别为 x_1、x_1'；过一段时间 A_2、A'钟相遇（事件 2，见图 1.2.1(2)），两钟读数分别为 t_2、t_2'，空间坐标分别为 x_2、x_2'。注意到 A'钟固定在 S' 系，在 S' 系中坐标始终不变，即总有 $x_1' = x_2'$。于是由(1.2.8)式得

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma(t_2' - t_1') = \gamma\Delta t'$$

$$= \gamma\Delta\tau = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \qquad (1.2.11)$$

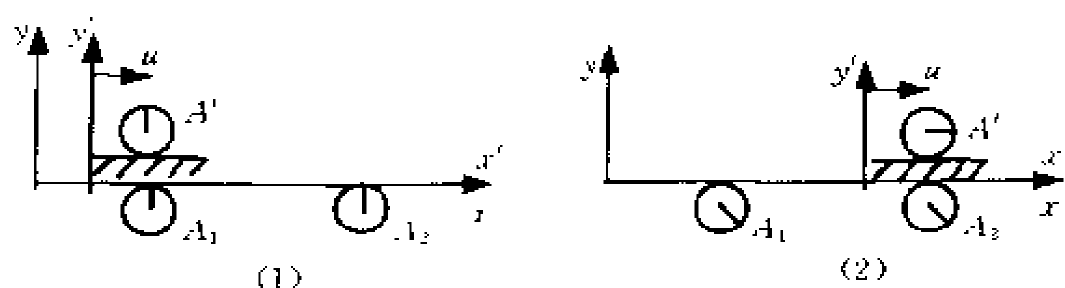


图 1.2.1

由于 $\gamma > 1$，所以 $\Delta t > \Delta t'$。A'是 S' 系时钟的代表，S 系的观察者确认 S' 系的时钟也就是运动的时钟走得慢了，比自己坐标系的静止时钟慢 $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$倍。$S'$ 系时钟变慢表示 S' 系中的时间节奏相对 S 系也变慢了。若 $u = 0.6c$，则 $\gamma = 5/4$，S 系过了 5 小时，看 S' 系只过了 4 小时。事件 1、2 在 S' 系中是同一地点发生的两事件，$\Delta t'$ 是用同一只钟测量的两事件时间间隔，称之为两事件的原时间隔，简称原时。由上面讨论知，各惯性系测量的事件 1、2 的时间间隔中，原时最短。若粒子运动，与粒子相对静止的时钟测的粒子运动时间就是原时。运动时钟变慢意味着相对观测者运动的人脉搏跳动也变慢，整个生命过程也以同样比率变慢。

运动时钟变慢，完全是相对论效应，是由相对运动引起对时间间隔测量的结果不同，并非运动的钟表本身结构或性能发生变化。而且从运动的相对性来说，S' 系看 S 系的钟是运动

的，而 S' 系的钟是静止的。因此按相对性原理，S' 系认为 S 系的时钟由于运动而变慢。这就是说，两个坐标系的时钟快慢也是相对的，视观测者所处地位不同而不同。

但是上述对表过程明明给出了 S' 系时钟变慢的结论，这是否与运动时钟变慢的相对性相矛盾？难道 S' 系的观察者不承认两次对表的结果吗？A_1、A' 表相遇时两表读数 t_1、t_1' 是客观事实，任何坐标系的观测者对此都无异议，同样无异议的是 A_2、A' 相遇时两表读数 t_2、t_2'，以及 $t_2'-t_1'$ 为 S' 系同一钟计量的两事件时间差。不同坐标系观测者意见不一致的是对 t_2-t_1 的解释。S 系观测者认为本系时钟是同步的，所以虽然 t_1、t_2 分别是两只钟的读数，但是 t_2-t_1 也是每一只钟在两事件期间的读数差，图 1.2.1 就是按 S 系观点画的。而 S' 系观测者认为 S 系中各钟都不同步，时钟读数与其坐标有关，因此两事件期间 S 系中某钟的读数差不是 t_2-t_1，所以 t_2-t_1 不代表 S 系中时钟走时快慢，(1.2.11)式也就不说明 S 系时钟比 S' 时钟走得快。

下面用具体对表例子说明 S' 系观点。设 $u=\sqrt{3}c/2$，则 $\gamma=2$。再设第一次对表 A_1、A' 相遇时 A_1 读数为 00：00，A' 读数为 01：00；第二次对表 A_2、A' 相遇时 A_2 读数为 04：00，A' 读数为 03：00。这样 $\Delta t=t_2-t_1=4$ 小时，$\Delta t'=t_2'-t_1'=2$ 小时，满足关系 $\Delta t=\gamma\Delta t'$，即按 S 系观点，S' 系时钟由于运动比本系慢一半。但按 S' 系观点看，A_1、A' 相遇时 A_2 钟读数不是 00：00，而是比 A_1 钟慢。由于 A_1、A_2 先后到达 A' 钟处间隔时间为 $\Delta t'$，所以 S' 系看 A_1、A_2 钟的坐标差为 $x_{A_2}'-x_{A_1}'=x_2'-x_1'=u\Delta t'=\sqrt{3}c$ 小时。由(1.2.8)式，在事件 1 时刻 S' 系观察两钟的读数分别是：$t_{A_1}=\gamma\left(t_1'+\frac{ux_{A_1}'}{c^2}\right)$，$t_{A_2}=$

$\gamma\left(t_1'+\dfrac{u x_{A_2}'}{c^2}\right)$，因此 S' 系认为，在事件 1 发生时，A_2 钟读数为

$t_{A_2}-t_{A_1}+\gamma u(x_{A_2}'-x_{1}')/c^2=00:00+2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}=03:00$。在 S' 系的任意时刻观察，S 系两个时钟 A_1、A_2 的时间间隔 3 小时不会改变，这样当 A_2、A' 相遇时，A_2 读数为 04：00，A_1 钟读数为 01：00。从 S' 系观点分析，两次对表期间 A_2 钟只走了 1 小时，S' 系时钟走 2 小时，所以按 S' 系观点，运动的时钟（S 系时钟）比本系时钟慢一半。当然，在 S' 系也可用本系的两只表 A'、B' 给 S 系中一只表 A_2 对表，同样也可证实 S 系时钟变慢。图 1.2.2 就是按 S' 系观点画的。

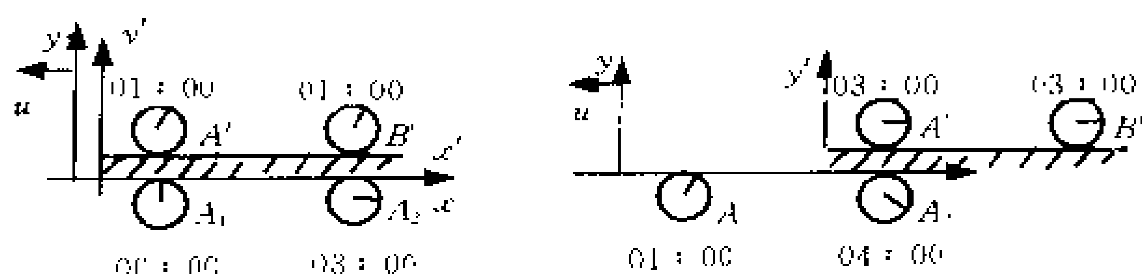


图 1.2.2

在 S 系中测量沿 x 方向静置在 S' 系中杆的长度。如前所述，测量的方法是同时测其两个端点的坐标，两个测量作为事件 1、2，其坐标分别为 (x_1,t_1)、(x_1',t_1') 和 (x_2,t_2)、(x_2',t_2')，其中 $t_1=t_2$。这样 S 系测的杆长（称为杆的动长）为 $l=x_2-x_1$；在 S' 系测的杆长（称为杆的静长或原长）为 $l'=x_2'-x_1'$。由于杆静止在 S' 系中，x_1'、x_2' 与时间无关，所以 l' 的大小与测量是否同时无关。利用 $t_1=t_2$ 的条件，由（1.2.7）式有

$$l'=x_2'-x_1'=\gamma(x_2-x_1)=\gamma l$$

于是

$$l=l'/\gamma=\sqrt{1-u^2/c^2}\,l' \qquad (1.2.12)$$

也就是沿运动方向上的动长小于静长，缩小比率也是γ。同样，运动中杆的长度的缩短也是相对论效应或是测量效应。在S'系看S系的测量，见图1.2.3，就可以了解动长小于静长的本质。S系同时进行的对杆两端点的测量，在S'系看并不同时，从(1.2.7)式，由于$x_2>x_1$，所以$t_2'<t_1'$，事件2先发生，即先测杆右端坐标x_2，然后该坐标随着S系坐标系向左运动。在事件1发生即测杆左端坐标x_1时，x_2-x_1显然已小于杆的原长l'。

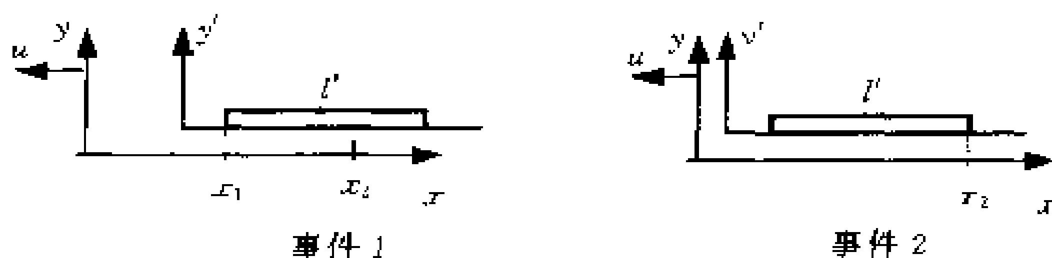


图1.2.3

狭义相对论的时空关系，以及运动时钟变慢、运动长度缩短的推论，在自然界得到广泛验证。特别是在高能粒子领域，微观粒子速度可以接近光速，相对论效应十分显著。例如，实验中发现，π^+介子静止时的平均寿命$\tau\approx2.5\times10^{-8}$ s，然后衰变为μ子和中微子；以速度$u=0.99c$运动的π^+介子，衰变前平均运动距离$l\approx52$ m，按古典时空观是无法理解的，因为$u\tau=7.4$ m$\ll l$。按狭义相对论时空观则很容易理解，正好验证了相对论的时空观。取相对π^+介子静止的坐标系为S'系，实验室为S系，设π^+介子产生为事件1，坐标为(x_1,t_1)、(x_1',t_1')；π^+介子衰变为事件2，坐标为(x_2,t_2)、(x_2',t_2')。于是有$x_1'=x_2'$和$t_2'-t_1'=\tau$，则由(11.2.8)式实验室测量π^+介子衰变前运动的距离为

$$x_2-x_1=\gamma u(t_2'-t_1')=\gamma u\tau=52.6\ \text{m}\approx l$$

其中$\gamma=(1-u^2/c^2)^{-1/2}=7.09$。此外，还可以用运动时钟变慢来解释。$\pi^+$介子的静止寿命相当于原时间隔，实验室测其以$u$运动的寿命为非原时，则其运动寿命为$\gamma\tau$，于是按运动学规律实验室测其运动距离应为$u\gamma\tau=52.6\ \mathrm{m}\approx l$。

1.2.4 相对论的速度变换和加速度变换

由洛伦兹坐标变换，立刻得到狭义相对论的速度和加速度变换，对(1.2.7)式求微分得：

$$\mathrm{d}x'=\gamma(\mathrm{d}x-u\mathrm{d}t)$$
$$\mathrm{d}y'=\mathrm{d}y$$
$$\mathrm{d}z'=\mathrm{d}z$$
$$\mathrm{d}t'=\gamma(\mathrm{d}t-u\mathrm{d}x/c^2)=\gamma(1-uv_x/c^2)\mathrm{d}t$$

再由运动学关系$v_x'=\mathrm{d}x'/\mathrm{d}t'$，$v_y'=\mathrm{d}y'/\mathrm{d}t'$，$v_z'=\mathrm{d}z'/\mathrm{d}t'$得速度变换关系：

$$\left.\begin{aligned}v_x'&=\frac{v_x-u}{1-uv_x/c^2}\\ v_y'&=\frac{v_y}{\gamma(1-uv_x/c^2)}\\ v_z'&=\frac{v_z}{\gamma(1-uv_x/c^2)}\end{aligned}\right\}\qquad(1.2.13)$$

将u换成$-u$，即得速度反变换

$$\left.\begin{aligned}v_x&=\frac{v_x'+u}{1+uv_x'/c^2}\\ v_y&=\frac{v_y'}{\gamma(1+uv_x'/c^2)}\\ v_z&=\frac{v_z'}{\gamma(1+uv_x'/c^2)}\end{aligned}\right\}\qquad(1.2.14)$$

类似地，对(1.2.13)式求微分得到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}v_x' &= \frac{\mathrm{d}v_x}{1-uv_x/c^2} - \frac{v_x-u}{(1-uv_x/c^2)^2}\left(-\frac{u}{c^2}\mathrm{d}v_x\right) \\
&= \frac{1-u^2/c^2}{(1-uv_x/c^2)^2}\mathrm{d}v_x \\
\mathrm{d}v_y' &= \frac{1}{\gamma}\left[\frac{\mathrm{d}v_y}{1-uv_x/c^2} - \frac{v_y}{(1-uv_x/c^2)^2}\left(-\frac{u}{c^2}\mathrm{d}v_x\right)\right] \\
\mathrm{d}v_z' &= \frac{1}{\gamma}\left[\frac{\mathrm{d}v_z}{1-uv_x/c^2} - \frac{v_z}{(1-uv_x/c^2)^2}\left(-\frac{u}{c^2}\mathrm{d}v_x\right)\right]
\end{aligned}
$$

再由 $a_x'=\mathrm{d}v_x'/\mathrm{d}t'$，$a_y'=\mathrm{d}v_y'/\mathrm{d}t'$，$a_z'=\mathrm{d}v_z'/\mathrm{d}t'$ 得

$$
\left.
\begin{aligned}
a_x' &= \frac{a_x}{\gamma^3(1-uv_x/c^2)^3} \\
a_y' &= \frac{1}{\gamma^2(1-uv_x/c^2)^2}\left(a_y + \frac{uv_y/c^2}{1-uv_x/c^2}a_x\right) \\
a_z' &= \frac{1}{\gamma^2(1-uv_x/c^2)^2}\left(a_z + \frac{uv_z/c^2}{1-uv_x/c^2}a_x\right)
\end{aligned}
\right\}
\tag{1.2.15}
$$

在相对论中，加速度不是不变量，变换公式繁复，用处很少，不再具有牛顿力学中的优越地位。

相对论速度变换应保证改变惯性参考系后，测量真空中光速不变为 c。见图1.2.4，固定在 S 系的光源 M 发出 1、2 两条光线，1 光线水平向右 $v_x=c$，$v_y=v_z=0$；2 光线竖直向下，$v_x=v_z=0$，$v_y=-c$。在 S' 系中看这两条光线的传播速度及方向。

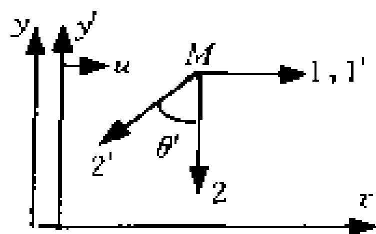


图1.2.4

由(1.2.13)式得 $1'$ 光线为：

$$v_x' = \frac{c - u}{1 - \frac{u}{c^2}c} = c$$

$$v_y' = v_z' = 0$$

于是 1′光线与 1 光线同向，光速 $c' = (v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2)^{1/2} = c$。

对应光线 2 的 2′光线为：

$$v_x' = \frac{0 - u}{1 - 0} = -u$$

$$v_y' = \frac{-c}{\gamma(1 - 0)} = -\sqrt{1 - u^2/c^2}\,c$$

$$v_z' = 0$$

于是 2′光线向 S' 系运动的反方向偏 θ' 角，有

$$\mathrm{tg}\theta' = \left|\frac{v_x'}{v_y'}\right| = \frac{u}{\sqrt{c^2 - u^2}} \qquad (1.2.16)$$

2′光线的光速 $c' = (v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2)^{1/2} = c$。

同一条光线在不同惯性系观察，传播速度大小相同，方向可以改变。这个现象在天文学上早就被发现了，称为光行差现象。在我们头顶上遥远的恒星射来的光线相当于上例中的光线 2。由于地球的运动，我们观察的光线方向与在更精确的惯性系如日心系中观察光线的方向偏转角度 θ_0'。以地球在日心系中轨道速度 3×10^4 m/s 作为地球参考系 S' 的速度 u，则 $u \ll c$，于是(1.2.16)式近似为 $\mathrm{tg}\theta' \approx u/c = 10^{-4}$，$\theta' \approx 20.5''$。天文观测到恒星的视方向以一年为周期改变其方向，改变的角度为 $41''$，正好是 θ' 的 2 倍。

1.3 相对论动力学基础

在经典力学中已了解到三大运动定理：动量定理、动能定理、角动量定理，以及相应的守恒定律——孤立系统动量守

恒、能量守恒、角动量守恒。这些是力学基本规律，也是解决力学问题的基础。实际上，这些规律已超出经典力学适用范围，是整个物理学的基本规律，无论是宏观还是微观，无论是低速还是高速，这些规律都适用。狭义相对论动力学也以它们为基础，只是从经典力学到相对论力学，有些物理量的形式有所改变，下面就对这些定律及其应用加以讨论。

在经典力学中，理论基础是牛顿三定律，运动定理是由牛顿定律推导的；但在相对论中，牛顿定律并不完全正确，不能作为狭义相对论动力学的基础。由(1.2.15)式加速度变换公式可知，在一个惯性系中未被加速的运动(即 $\boldsymbol{a}=0$)，经洛伦兹变换后仍然是未被加速的(即 $\boldsymbol{a}'=0$)，所以牛顿第一定律——惯性定律对洛伦兹变换协变。牛顿第二定律对洛伦兹变换不协变。牛顿第三定律在碰撞中保持协变。实际上是动量守恒的体现。所以在狭义相对论中牛顿第一和第三定律也是正确的，只需对牛顿第二定律加以修正。

由于相对论中同时性是相对的，清除了"超距"作用的概念，因此在相对论力学中只讨论没有超距作用的理论，主要是一个质点的运动，或是多个质点的碰撞。

1.3.1 相对论动量定理

设质点速度为 $\boldsymbol{v}$，在经典力学中其质量(以后称之为牛顿质量)为 m^0，用动量 $\boldsymbol{P}$ 描述它的动力学状态，要求在 $u \ll c$ 时能够过渡到牛顿力学动量 $m^0\boldsymbol{v}$，可以很合理地假设相对论动量(以后简称动量)为

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v} \tag{1.3.1}$$

其中 $m=m(m^0,v)$，是牛顿质量 m^0 和速率 v 的函数，称之为相对论质量，以后简称质量。外界对质点作用使之动量改变，作用力用 $\boldsymbol{F}$ 代表，定义

$$F = \mathrm{d}P/\mathrm{d}t \tag{1.3.2}$$

于是有质点动量定理的微分形式

$$\mathrm{d}P = F\mathrm{d}t \tag{1.3.3}$$

积分形式

$$\Delta P = P - P_0 = \int_0^t F\mathrm{d}t \tag{1.3.4}$$

如果在某段时间内 $F=0$，则在此期间 P 保持不变，即动量守恒。

设有两个质点 1、2 发生碰撞，碰撞过程中两质点动量分别为 P_1、P_2，系统总动量 $P_总 = P_1 + P_2$。作为孤立系统在碰撞过程中动量守恒，即 $P_总$ 保持不变，于是

$$\mathrm{d}P_总/\mathrm{d}t = \mathrm{d}P_1/\mathrm{d}t + \mathrm{d}P_2/\mathrm{d}t = 0$$

所以两质点之间的相互作用力 $F_{21}\left(=\frac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}t}\right)$、$F_{12}\left(=\frac{\mathrm{d}P_2}{\mathrm{d}t}\right)$ 满足关系

$$F_{21} + F_{12} = 0 \tag{1.3.5}$$

由此可知，在碰撞过程中牛顿第三定律仍然成立，是动量守恒定律的直接结果。

由于内力满足牛顿第三定律，所以对非孤立系统，系统总动量的变化只取决于外力，即

$$F_外 = \mathrm{d}P_总/\mathrm{d}t \tag{1.3.6}$$

这就是质点系统的动量定理。

1.3.2　相对论质量

利用碰撞过程中动量守恒、能量守恒，以及动量守恒满足相对性原理，可以得到相对论质量 m 的具体形式。

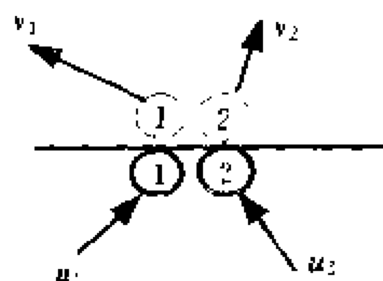


图 1.3.1

设质点1、2发生碰撞，碰前速度分别为$\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{u}_2$，碰后速度分别为$\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$则在任意惯性系观测，碰撞过程动量守恒，在S系

$$m_1(u_1)\boldsymbol{u}_1 + m_2(u_2)\boldsymbol{u}_2 = m_1(v_1)\boldsymbol{v}_1 + m_2(v_2)\boldsymbol{v}_2$$

在S'系

$$m_1'(u_1')\boldsymbol{u}_1' + m_2'(u_2')\boldsymbol{u}_2' = m_1'(v_1')\boldsymbol{v}_1' + m_2'(v_2')\boldsymbol{v}_2'$$

其中m^0的影响体现在$m_1, m_2, \cdots$等下标的不同上，所以m_1，$m_2, \cdots$只是速率的函数，为了利用速度变换关系式，将动量守恒关系式写成分量形式，如y分量等式

$$m_1(u_1)u_{1y} + m_2(u_2)u_{2y} = m_1(v_1)v_{1y} + m_2(v_2)v_{2y} \quad (*)$$

$$m_1'(u_1')u_{1y}' + m_2'(u_2')u_{2y}' = m_1'(v_1')v_{1y}' + m_2'(v_2')v_{2y}'$$

由(1.2.14)式将上面第二式中u_{1y}'、u_{2y}'、v_{1y}'、v_{2y}'依次换成u_{1y}、u_{2y}、v_{1y}、v_{2y}，得到下式

$$\frac{m_1'(u_1')u_{1y}}{\gamma(1-uu_{1x}/c^2)} + \frac{m_2'(u_2')u_{2y}}{\gamma(1-uu_{2x}/c^2)}$$

$$= \frac{m_1'(v_1')v_{1y}}{\gamma(1-uv_{1x}/c^2)} + \frac{m_2'(u_2')u_{2y}}{\gamma(1-uv_{2x}/c^2)} \quad (**)$$

由于$\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{u}_2$可以任意选取，而且因为碰撞条件不同$\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$也具有任意性，所以要同时满足(*)和(**)两式，对m的形式有严格的限制，仔细分析上面两式发现，如果速度为$\boldsymbol{v}$的质量m在S、S'两系有以下的变换关系：

$$m'(v') = \gamma(1-uv_x/c^2)m(v)$$

$$= \frac{1-uv_x/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}m(v) \quad (1.3.7)$$

那么

$$\frac{m_1'(u_1')}{\gamma(1-uu_{1x}/c^2)} = m_1(u_1)$$

$$\frac{m_2'(u_2')}{\gamma(1-uu_{2x}/c^2)}=m_2(u_2)$$

$$\frac{m_1'(v_1')}{\gamma(1-uv_{1x}/c^2)}=m_1(v_1)$$

$$\frac{m_2'(v_2')}{\gamma(1-uv_{2x}/c^2)}=m_2(v_2)$$

于是(*)和(* *)两式完全相同。

类似地,可讨论 z 分量。对 x 分量上面的(*)和(* *)两式改为

$$m_1(u_1)u_{1x}+m_2(u_2)u_{2x}=m_1(v_1)v_{1x}+m_2(v_2)v_{2x}$$

$$\frac{m_1'(u_1')(u_{1x}-u)}{1-uu_{1x}/c^2}+\frac{m_2'(u_2')(u_{2x}-u)}{1-uu_{2x}/c^2}$$

$$=\frac{m_1'(v_1')(v_{1x}-u)}{1-uv_{1x}/c^2}+\frac{m_2'(v_2')(u_{2x}-u)}{1-uv_{2x}/c^2}$$

要从上式(S 系动量守恒)推出下式(S' 系动量守恒),除(1.3.7)式的质量变换关系外,还要求质量守恒关系式:

$$m_1(u_1)+m_2(u_2)=m_1(v_1)+m_2(v_2) \qquad (1.3.8)$$

以后知道,(1.3.8)式实际上代表的是碰撞过程中能量守恒关系,因此在相对论中,动量守恒与能量守恒密不可分。

认真回顾上面的说明过程就会发现,在(1.3.7)式右边去掉因子 γ 或乘任意不为零的 u 的函数 $f(u)$,都可以使动量守恒满足相对性原理,也就是说单从满足动量守恒具有相对性来说,m 函数的选择不是惟一的。我们选择(1.3.7)式还有一个重要的理由,就是这样的形式可使 m 的表达式具有洛伦兹变换下的不变性。由恒等式

$$\gamma\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)=\sqrt{\frac{1-v^2/c^2}{1-v'^2/c^2}} \qquad (1.3.9)$$

将(1.3.9)式代入(1.3.7)式得

$$m'(v')\sqrt{1-v'^2/c^2}=m(v)\sqrt{1-v^2/c^2}$$

$$=\text{与参考系无关的常数 } m_0$$

所以

$$m(v)=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{1.3.10}$$

换到 S' 系有同样的关系：

$$m'(v')=\frac{m_0}{\sqrt{1-v'^2/c^2}}$$

(1.3.10)式表示相对论质量与速度的关系。显然，$m_0=m(0)$，是静止质点的质量，称为静止质量，与惯性系无关，是坐标变换不变量。当 $v\ll c$ 时，$m(v)\approx m_0$，所以牛顿质量 m^0 近似为 m_0，或者说牛顿质量是相对论质量的零阶近似。当粒子速度为 c 时，为使(1.3.10)式有意义，必须 $m_0=0$，即速度为 c 的粒子其静止质量必为零，反过来，若 $m_0=0$ 则其速度必为 c，这表示静止质量为零的粒子其速度恒为 c。

1.3.3 力与加速度关系和牛顿第二定律修正

由于 m 不再是常数，而是与 v 有关，所以由(1.3.2)式

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v})$$

$$=m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

$$=m\boldsymbol{a}+\boldsymbol{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \tag{1.3.11}$$

由(1.3.10)式

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=m_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

$$=m_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{c^2}\right)^{-1/2}$$

$$=-\frac{m_0}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}\left(-\frac{2}{c^2}\boldsymbol{v}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{m}{c^2 - v^2}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a}$$

$$= \frac{1}{c^2 - v^2}\boldsymbol{v} \cdot \left(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right)$$

其中将 v^2 代以 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}$，并利用了 $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$，由上式解出

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{c^2}\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} \tag{1.3.12}$$

代入(1.3.11)式得

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}\frac{\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}}{c^2} \tag{1.3.13}$$

或

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} - \boldsymbol{v}\frac{\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}}{mc^2} \tag{1.3.14}$$

(1.3.13)式和(1.3.14)式可以看作修正后的牛顿第二定律，与经典力学牛顿定律 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ 有很大不同，在 $\boldsymbol{F}$ 作用下，质点不但有 $\boldsymbol{F}$ 方向加速度，还有 $-\boldsymbol{v}$ 方向加速度。

若 $\boldsymbol{F} /\!/ \boldsymbol{v}$ 则 $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} - \boldsymbol{v}\frac{Fv}{mc^2} = \frac{\boldsymbol{F}}{m}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$

$$= \frac{\boldsymbol{F}}{m_0}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}$$

若 $\boldsymbol{F} \perp \boldsymbol{v}$ 则 $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} = \frac{\boldsymbol{F}}{m_0}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$

若 $v \ll c$ 则 $\boldsymbol{a} \approx \frac{\boldsymbol{F}}{m_0}$

例：静止质量为 m_0 的质点，从静止开始在恒力 $\boldsymbol{F}$ 作用下运动，求 t 时刻速度 $\boldsymbol{v}(t)$。

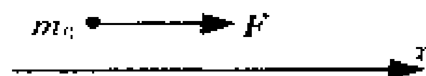


图 1.3.2

解：取 x 坐标沿 $\boldsymbol{F}$ 方向，质点作直线运动。在 x 轴投影。

（1）按牛顿力学计算

$v(t)=at=Ft/m_0 \qquad t\to\infty$时，$v\to\infty$

（2）按相对论计算

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{F}{m_0}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}$$

$$\therefore \quad \int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}=\int_0^t \frac{F}{m_0}\mathrm{d}t$$

得：$\dfrac{cv}{\sqrt{c^2-v^2}}=\dfrac{Ft}{m_0}$

解出 $v(t)=\dfrac{Ft}{m_0\sqrt{1+(Ft/cm_0)^2}}$

当 $Ft/m_0c\ll 1$ 时 $v(t)\approx\dfrac{Ft}{m_0}$

当 $t\to\infty$ 时 $v(t)\to\dfrac{Ft}{m_0}\dfrac{m_0c}{Ft}=c$，表明粒子速度不可能超过光速。

还可以直接应用动量定理计算：

$$mv-0=\int_0^t F\mathrm{d}t=Ft \qquad 即\frac{m_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=Ft$$

于是得 $v(t)=\dfrac{Ft}{m_0\sqrt{1-(Ft/cm_0)^2}}$ ……

1.3.4 能量转化和守恒定律 · 相对论能量

由能量转化和守恒定律，质点 m 能量的增加来自外界对它做的功，即

$$\mathrm{d}E=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{1.3.15}$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 为质点的元位移，$\boldsymbol{F}$ 为作用于质点的合力。质点能量的时间变化率等于外界对它做功的功率，即

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} \tag{1.3.16}$$

v 为质点的速度。将(1.3.12)式代入得：

$$\frac{dE}{dt}=\frac{d}{dt}(mc^2)$$

于是相对论能量 $E=mc^2$ + 积分常数。爱因斯坦取积分常数为零，称 mc^2 为质点相对论(总)能量，即著名的质能关系式

$$E=mc^2 \tag{1.3.17}$$

这个公式可以说是相对论力学的最重要的成就，它在自然科学理论中的重要性，它的优美与简洁，无论如何评价都不过分。

质点静止时质量为 m_0，相应的能量称为静止能量，记为

$$E_0=m_0c^2 \tag{1.3.18}$$

质点以 v 运动时质量为 m，能量 $E=mc^2$，则其动能为

$$E_K=E-E_0=mc^2-m_0c^2 \tag{1.3.19}$$

看起来相对论动能与牛顿理论的动能很不一样，但是在 $v\ll c$ 情况下可以近似为

$$E_K=m_0\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}-1\right]c^2$$

$$\approx m_0\left[\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right)-1\right]c^2=\frac{1}{2}m_0v^2$$

即过渡到熟悉的经典动能，注意经典情况质量近似为 m_0。

由质能关系式(1.3.17)式很容易了解，孤立系统能量守恒

$$E_{总}=\sum E_i=\sum m_ic^2=(\sum m_i)c^2=常数$$

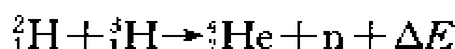
对应着质量守恒：

$$m_{总}=\sum m_i=常数$$

在经典物理学中，孤立系统质量守恒和能量守恒分别是两个守恒定律。现在认识到，经典物理学中的质量实质上是静止质量，孤立系统的静止质量是不守恒的，所以经典物理的质量守恒是近似成立的，只有在一般的化学反应或低能过程中

才近似不变。静止能是粒子质心静止状态下粒子所具有的总能，包括组成它的更小粒子的能量及其结合能，例如原子核的静止能，包括组成它的中子、质子的能量和中子、质子的结合能。核反应时中子、质子分离组成新的核，若新核结合能比原来核的结合能大(结合能小于零，此处讲结合能指其绝对值)，则一部分结合能释放出来，使反应后粒子总静止质量小于反应前的粒子总静止质量，这就是核反应中的(静止)质量亏损。更显著的是正、负粒子湮灭，静止质量全部转化为能量。其实，处于激发态的原子、分子静止质量与处于基态的原子、分子的静止质量也不相同，只是所差甚微罢了。

例如热核反应氘(D)，氚(T)结合为He：



$$ {}_1^2\mathrm{H} + {}_1^3\mathrm{H} \rightarrow {}_2^4\mathrm{He} + \mathrm{n} + \Delta E $$

反应中静止质量亏损：

$$ \Delta m_0 = m_{\mathrm{D}} + m_{\mathrm{T}} - m_{\mathrm{He}} - m_{\mathrm{n}} = 3.11 \times 10^{-29}\ \mathrm{kg} $$

于是释放能量

$$ \Delta E = (\Delta m_0)c^2 = 2.8 \times 10^{-12}\ \mathrm{J} $$

1.3.5 相对论能量与动量关系

在牛顿力学中，设势能为 V，则能量为

$$ E = \frac{1}{2}m_0 v^2 + V = \frac{P^2}{2m^0} + V $$

由此关系，将 E 和 $\boldsymbol{P}$ 替换为算符 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ 和 $-i\hbar\nabla$，就得到量子力学中非相对论的薛定谔方程。

在相对论中，由 $E = mc^2 = m_0(1 - v^2/c^2)^{-1/2}c^2$，得 $m_0c^2 = E(1 - v^2/c^2)^{1/2}$，两边平方得

$$ \begin{aligned} m_0^2c^4 &= E^2(1 - v^2/c^2) = E^2 - (mc^2)^2 \cdot (v^2/c^2) \\ &= E^2 - (mv)^2c^2 = E^2 - P^2c^2 \end{aligned} $$

即：

$$E^2 = P^2c^2 + m_0^2c^4 = P^2c^2 + E_0^2 \qquad (1.3.20)$$

这就是著名的相对论能量与动量的关系。

由此关系式可得：(1)因为 m_0 是洛伦兹变换不变量，所以 $(E^2-P^2c^2)$ 也是洛伦兹变换不变量；(2)取 $m_0=0$，得到静止质量为零的粒子的动量

$$P = E/c = mc \qquad (1.3.21)$$

从而明确看到静止质量为零的粒子速度必为 c；(3)将 E 和 $\boldsymbol{P}$ 用算符 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ 和 $-i\hbar\nabla$ 代换，就得到相对论的量子力学方程——克莱因-高登(Klein-Gordon)方程。

1.4 质量、动量、能量和力的相对论变换；相对论不变量；闵可夫斯基空间

1.4.1 质量、动量、能量和力的相对论变换

质量的相对论变换前面已经给出

$$m' = \gamma\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)m = \frac{1 - uv_x/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}m \qquad (1.3.7)$$

逆变换为

$$m = \gamma\left(1 + \frac{uv_x'}{c^2}\right)m' = \frac{1 + uv_x'/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}m' \qquad (1.4.1)$$

由质量 m 和速度 $\boldsymbol{v}$ 的变换得到动量的变换

$$\boldsymbol{P}' = m'\boldsymbol{v}' = \gamma(1 - uv_x/c^2)m\boldsymbol{v}'$$

将(1.2.13)式代入，于是得

$$P_x' = \gamma m(v_x - u) = \gamma(mv_x - mu) = \gamma(P_x - uE/c^2)$$

$$P_y' = mv_y = P_y$$

$$P_z' = mv_z = P_z$$

其中在 x 分量关系式中用 E/c^2 代替 m，E 与 $\boldsymbol{P}$ 联系起来不能分开，所以相应地要考虑 E 的变换：

$$
\begin{aligned}
E' = m'c^2 &= \gamma(1 - uv_x/c^2)mc^2 \\
&= \gamma(mc^2 - umv_x) \\
&= \gamma(E - uP_x)
\end{aligned}
$$

即：

$$
\left.\begin{aligned}
P_x' &= \gamma(P_x - uE/c^2) \\
P_y' &= P_y \\
P_z' &= P_z \\
E' &= \gamma(E - uP_x)
\end{aligned}\right\} \tag{1.4.2}
$$

逆变换为

$$
\left.\begin{aligned}
P_x &= \gamma(P_x' + uE'/c^2) \\
P_y &= P_y' \\
P_z &= P_z' \\
E &= \gamma(E' + uP_x')
\end{aligned}\right\} \tag{1.4.3}
$$

微分 $\boldsymbol{P}'$ 得：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}P_x' &= \gamma(\mathrm{d}P_x - u\mathrm{d}E/c^2) \\
\mathrm{d}P_y' &= \mathrm{d}P_y \\
\mathrm{d}P_z' &= dP_z
\end{aligned}
$$

再由

$$
\mathrm{d}t' = \gamma(1 - uv_x/c^2)\mathrm{d}t,
$$

以及

$$
\begin{aligned}
F_x' &= \mathrm{d}P_x'/\mathrm{d}t' \\
F_y' &= \mathrm{d}P_y'/\mathrm{d}t' \\
F_z' &= \mathrm{d}P_z'/\mathrm{d}t'
\end{aligned}
$$

就得到力的变换关系

$$
\left.
\begin{aligned}
F_x' &= \frac{F_x - \dfrac{u}{c^2}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}}{1 - uv_x/c^2} \\
F_y' &= \frac{F_y}{\gamma(1 - uv_x/c^2)} \\
F_z' &= \frac{F_z}{\gamma(1 - uv_x/c^2)}
\end{aligned}
\right\}
\tag{1.4.4}
$$

其中用到 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$，相应的逆变换为

$$
\left.
\begin{aligned}
F_x &= \frac{F_x' + \dfrac{u}{c^2}\boldsymbol{F}'\cdot\boldsymbol{v}'}{1 + uv_x'/c^2} \\
F_y &= \frac{F_y'}{\gamma(1 + uv_x'/c^2)} \\
F_z &= \frac{F_z'}{\gamma(1 + uv_x'/c^2)}
\end{aligned}
\right\}
\tag{1.4.5}
$$

其中将 $u\to -u$ 就可由正变换得到逆变换。动量、能量的变换类似坐标的变换，力的变换类似速度的变换。

1.4.2 相对论变换不变量

相对论变换不变量，就是经洛伦兹变换保持不变的量。不变量与守恒量不同，守恒量是在同一个惯性系中不随时间改变的物理量，不变量是在不同惯性系中测量结果都相同的物理量。

在经典力学中，伽利略变换下的不变量有长度、时间间隔、质量、加速度、力、角度等等。

相对论中洛伦兹变换不变量有静止质量 m_0，前面在相对论质量的讨论中说明 m_0 与坐标系无关；由(1.3.20)式知，$E^2-P^2c^2=m_0^2c^4$，因此对一个粒子来说，$E^2-P^2c^2$ 也是坐标变换不变量，这个结果可以推广到粒子系统：令 $E_{总}=\sum E_i$，$P_{总}$

$=\sum \boldsymbol{P}_i$，则有不变量

$$E_{总}^2 - \boldsymbol{P}_{总}^2$$

最重要的不变量是时空间隔（简称间隔）Δs。定义事件1，2的时空间隔 Δs 为

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) \qquad (1.4.6)$$

其中事件1、2分别为(x_1, y_1, z_1, t_1)和(x_2, y_2, z_2, t_2)，$\Delta t = t_2 - t_1$，$\Delta x = x_2 - x_1$，$\Delta y = y_2 - y_1$，$\Delta z = z_2 - z_1$，并记 $\Delta s^2 = (\Delta s)^2$，$\Delta t^2 = (\Delta t)^2$，$\Delta x^2 = (\Delta x)^2$，$\Delta y^2 = (\Delta y)^2$，$\Delta z^2 = (\Delta z)^2$。

Δs^2 的不变性可由洛伦兹坐标变换直接验证：

$$\begin{aligned}
\Delta s'^2 &= c^2\Delta t'^2 - (\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2) \\
&= c^2\gamma^2(\Delta t - u\Delta x/c^2) - [\gamma^2(\Delta x - u\Delta t)^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2] \\
&= \gamma^2[(c\Delta t - u\Delta x/c)^2 - (\Delta x - u\Delta t)^2] - (\Delta y^2 + \Delta z^2) \\
&= \gamma^2[(c^2 - u^2)\Delta t^2 - (1 - u^2/c^2)\Delta x^2] - (\Delta y^2 + \Delta z^2) \\
&= c^2\Delta t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) \\
&= \Delta s^2
\end{aligned}$$

注意当两事件之间没有因果关系时，Δs^2 可正可负；当两事件有因果关系时，由于 $\Delta l/\Delta t \leqslant c$，所以 $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta l^2 \geqslant 0$，其中 $\Delta l = (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{1/2}$。相对质点静止的参考系里时钟所显示的时间间隔称为该质点的原时间隔，记为 $\Delta\tau$，在相对质点静止的参考系中质点坐标不变，即 $\Delta l = 0$，所以有关系

$$\Delta s^2 = c^2\Delta\tau^2 \qquad (1.4.7)$$

因此时空间隔有了另一个物理意义，即等于光速乘以原时。

1.4.3 闵可夫斯基空间和闵可夫斯基图

经典理论中空间、时间是分开的，长度（空间中二点间距离）定义为

$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \qquad (1.4.8)$$

在坐标框架转动（相当于坐标变换）时，长度是坐标变换不

变量。

在狭义相对论中，时、空紧密联系不能分开。闵可夫斯基(H. Minkowski)提出一种形式体系，将时间和三维空间合在一起构成四维空间来表述狭义相对论的时空和洛伦兹变换的性质，四维空间的点称为“世界点”，坐标为(x,y,z,ct)，其中取时间轴为ct，是为了使其单位也是长度，从而与纯空间轴单位相同。两个世界点间“距离”(长度)定义为两世界点的时空间隔Δs，这样构成的四维空间称为闵可夫斯基空间。闵可夫斯基空间的长度是洛伦兹变换下的不变量，但是Δs^2可正可负，这与欧几里德空间长度平方恒正不同，是闵氏空间与欧氏空间的重要区别。

把闵可夫斯基空间坐标系、世界点等画出来，称为闵可夫斯基图。四维的图画不出来，通常只画一维纯空间x和一维时间ct构成的闵可夫斯基图，见图1.4.1。由于在闵可夫斯基空间中没有勾股定理，所以将x轴和ct轴画成互相垂直并没有什么特殊意义(三维纯空间有勾股定理，即(1.4.8)式)。图上任意点即世界点，质点运动轨迹是图上一条曲线，称为世界

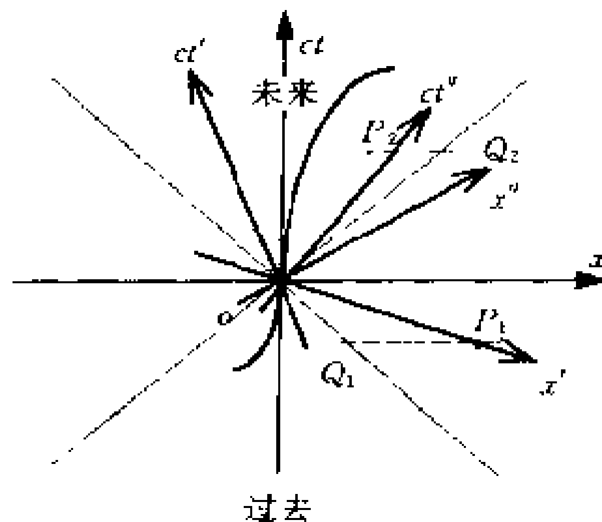


图1.4.1

线。在世界线上，$\frac{dl}{dt}=v$，所以实物粒子的世界线上 $\Delta s^2>0$；光子速度为 c，所以光子世界线上 $\Delta s^2=0$，称为零世界线。对于与原点间隔为零的世界线上 $s^2=0$，则 $ct=\pm x$，在图中是两条对角线，如图中虚线所画。由于 Δs^2 是不变量，所以在任意惯性系的闵氏图中，零世界线都是对角线。这个重要结论，有助于我们了解闵氏图中表示的洛伦兹坐标变换。这两条对角线(零世界线)将整个时空分成上、下和左、右四个区域，在左、右两区域中世界点如 P_1 点，它与原点间距为 $s^2=c^2t_{P1}^2-x_{P1}^2$。与零世界线上 Q_1 点相比($s^2=c^2t_{Q1}^2-x_{Q1}^2=0$)，$t_{P1}=t_{Q1}$，而 $x_{P1}>x_{Q1}$，所以 $s^2<0$，这个区域的时空间隔称为类空的，在此区域时序可以颠倒。凡有因果关系的事件，特别是粒子的实际运动轨道不会出现在类空区。在上、下两区域中世界点如 P_2，它与原点的时空间隔为 $s^2=c^2t_{P2}^2-x_{P2}^2$。同样与零世界线上 Q_2 点比较，$t_{P2}=t_{Q2}$，$x_{P2}<x_{Q2}$，所以 $s^2>0$，这个区域的时空间隔称为类时的，在此区域时序不会颠倒。凡有因果关系的事件，特别是粒子的实际运动轨迹，只能出现在类时区。对匀速直线运动 $x/ct=$常数，其世界线是直线。若原点表示现在，则下方区域表示过去，上方区域表示将来。一般情况下还有 y、z 两维空间，即四维时空。在四维闵氏空间里，零世界线构成一个锥面——称为光锥，如图 1.4.2 所示，一个在 $t=0$ 时刻通过原点的粒子，必然在类时区沿着时间轴从下向上运动。

洛伦兹坐标变换，相当于闵氏图中坐标轴的旋转，见图 1.4.3。为确定闵氏图中的洛伦兹坐标变换，先找 x' 轴在 S 系中的坐标方程。x' 轴上点在 S' 系的纵坐标皆为 0，故有 $t'=\gamma(t-ux/c^2)=0$。所以 x' 轴的坐标方程为

$$ct=\frac{u}{c}x \tag{1.4.9}$$

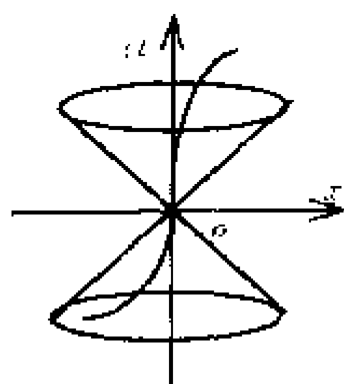


图 1.4.2

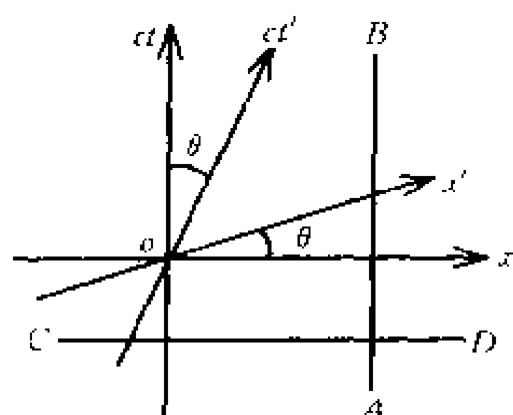


图 1.4.3

因此 x' 轴在 S 坐标系中是斜向上的直线，与 x 轴夹角 $\theta = \mathrm{tg}^{-1}\frac{u}{c}$。类似，$ct'$ 轴上世界点在 S' 系的横坐标皆为零：$x' = \gamma(x - ut) = 0$，所以 ct' 轴的坐标方程为 $x = ut$，即

$$ct = \frac{c}{u}x \tag{1.4.10}$$

因此 ct' 轴斜向右，与 ct 轴夹角亦为 $\theta = \mathrm{tg}^{-1}\frac{u}{c}$。所以在闵氏图中洛伦兹坐标变换相当于坐标轴旋转，不过这种转动并不是 ct-x 框架刚性转动，而是同时向内或同时向外转相等的角度 θ，始终保持对 $s^2 = 0$ 的零世界线的对称性，即保持了 s^2 的不变性。以上讨论皆设 $u > 0$，若 $u < 0$ 则转向相反。

在 S 系中静止物体世界线与 ct 轴平行，如图 1.4.3 中 AB 直线；S 系中同时事件的世界点位于与 x 轴平行的直线上，如图 1.4.3 中 CD 直线。但在 S' 系看，AB 直线不与 ct' 轴平行，该物体做匀速直线运动；CD 直线也不与 x' 轴平行，其上世界点代表的事件不同时，这就是同时性的相对性。对类空区的世界点 P_1，总可以找到一条空间轴 x' 通过它（见图 1.4.1），即在 ct'-x'（S'）参考系看来，此事件与原点事件必为

异地同时，即其与原点的时空间隔本质上是纯空间间隔，故称为类空的(Space-like)。对类时区的世界点 P_2，总可以找到一条时间轴 ct''通过它(见图 1.4.1)，即在 ct''-x''(S'')参考系看来，该事件与原点事件必为同地异时，即其与原点的时空间隔本质上是纯时间间隔，故称为类时的(Time-like)。

第 2 章　广义相对论的基本原理

本章在狭义相对论的基础上介绍广义相对论的基本物理思想和基本原理。

2.1　广义相对论的基本原理

爱因斯坦于 1905 年建立狭义相对论，开创了物理学新纪元。但是还有一些与相对论有关的重要问题没有解决。任何正确的物理规律必须满足相对性原理，而牛顿的引力理论是不满足相对性原理的，说明它不是严格的引力理论。无论是牛顿力学还是狭义相对论、电磁理论等物理规律，都是在惯性系里的规律，在非惯系是不成立的。换句话说，对物理规律而言，惯性系和非惯性系是不平等的，即狭义相对性原理是有局限性的。从牛顿的绝对时空观到狭义相对论的时空观已经有很大飞跃，时间、空间和运动有机地结合在一起，但是时空仍然是孤立的，与物质相脱离，与爱因斯坦对时间、空间、物质的信念不符合。因此爱因斯坦在建立狭义相对论后并未止步不前，从 1907 年起历时八年到 1915 年建立了广义相对论，把相对性原理推广到任意参考系，建立了关于时间、空间、引力的理论，将时空与物质及其分布和运动联系起来，使人类对于自然界特别是时空的认识迈上新的台阶。近二三十年来，广义相对论迅速发展，在空间物理、天体物理、宇宙学等方面取得巨大成绩。

广义相对论基于两个基本原理：等效原理和广义相对性原理。其中等效原理是整个广义相对论的基础和出发点，而等效原理的出发点是实验事实：物质的惯性质量等于引力质量。

2.1.1 惯性质量和引力质量

惯性质量记作 m_i，开始是由牛顿运动定律定义的，反映物质惯性的大小，到狭义相对论中进一步与物质的能量联系起来，更严格地讲应称为相对论质量，是物质本性的一个定量体现。引力质量记作 m_g，是由牛顿引力定律定义的，反映物质的引力特性，也是物质本性的一个定量体现。表面看 m_i 和 m_g 分别是物质二种不同本性的体现，两者不会有确定关系，但由实验知道，各种物质的 m_i 与 m_g 成正比，比例系数与物质无关，这样选择合适单位后可取 $m_i=m_g$，最后通过实验确定万有引力常数 G 的数值。

最早的实验可以追溯到伽利略著名的自由落体实验，落体受地球引力 $m_g g$（其中 $g=GM_\oplus/R_\oplus^2$ 为引力场强，可参考后面 6.1.1 节；$M_\oplus$、$R_\oplus$分别为地球质量、半径），由牛顿运动定律 $m_i a=m_g g$，故落体加速度 $a=m_g g/m_i$。实验表明，质量不同但从同一高度同时下落的物体同时落到地面，说明 a 与落体无关，即 m_g/m_i 是与物体无关的常数。当然，伽利略做落体实验的时候还没有引力质量的概念，他当时做实验的目的并不是讨论 m_i、m_g 的关系。牛顿在发现万有引力定律之后，就注意到 m_i、m_g 的区别，有目的地做空心单摆实验，定量研究 m_i、m_g 关系。他把单摆摆锤做成空心的，里面装上不同的物质，分别测其周期。单摆受引力 $m_g g$，对悬挂点角动量为 $m_i l^2 \dot{\theta}$（l 为摆长，θ 为摆动角），由角动量定理，在小角度摆动情况下

$$m_i l^2 \ddot{\theta} = -m_g g l \sin\theta \approx -m_g g l \theta$$

即
$$\ddot{\theta} + \frac{m_g g}{m_i l}\theta = 0$$

所以单摆周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_i l}{m_g g}}$$

如果 m_i 与 m_g 没有确定关系则周期将各不相同。实验结果是各种材料各种质量的摆的周期都相同，以 10^{-3} 的精度验证 $m_i \propto m_g$。

以上两个实验都是对动态物体进行的，因此精度不高，匈牙利科学家厄特沃什(R. Von Eotvos)从 1890 年起用扭摆做静态实验，精度提高到 10^{-8}。实验原理如下。由于地球以 ω 匀速转动，以地球为参考系要考虑惯性离心力。静止在地球表面纬度 φ 处的质点 m 受到地球引力 $\boldsymbol{F}_g$，惯性离心力 $\boldsymbol{F}_i$。

$$\begin{cases} F_g = m_g g \\ F_i = m_i \omega^2 R_\oplus \cos\varphi \end{cases}$$

$F_i \ll F_g$。合力 $\boldsymbol{F}$ 就是地球上静止观察者实际观测到的地球对物体的作用力。如果 $m_g \propto m_i$，那么在地球上同一地点 $\boldsymbol{F}_g$ 与合力 $\boldsymbol{F}$ 的夹角 α 就与物质种类无关；否则，不同物质对应的 α 就各不相同，见图 2.1.1。厄特沃什的实验就利用这个结果，用悬丝在一根轻杆中点将杆悬挂起来构成扭摆，把两个不同材质的小球 1、2 固定在轻杆的两端并调

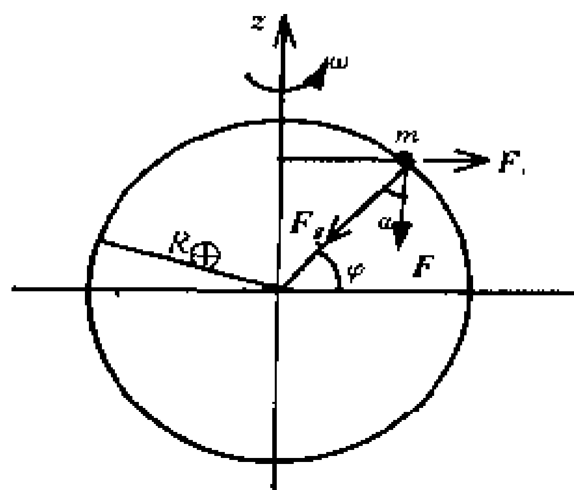


图 2.1.1

节杆成水平，将杆沿东西方向放置。如果 m_g 与 m_i 不成正比，a 与材质有关，则两球所受合力 F_1、F_2 之间有夹角 Δa，见图 2.1.2。这样，两力的水平分力 $F_{1水平}$ 和 $F_{2水平}$ 对悬丝产生扭矩，使杆旋转。实验未发现杆的转动，以 10^{-8} 的精度证实 $m_g \propto m_i$。由于这个实验关系重大，以后不断有人继续类似实验，实验精度也不断提高，到本世纪 70 年代，以 10^{-12} 的精度验证 $m_i \propto m_g$。

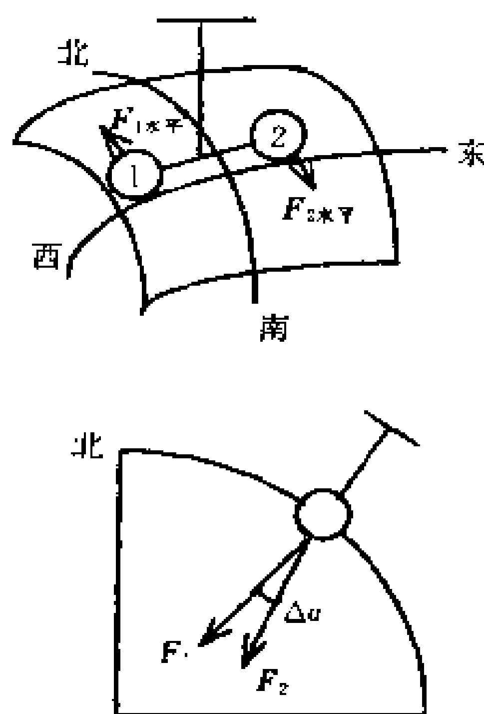


图 2.1.2

取 $m_i = m_g$，则 $F_i/F_g \approx \cos\phi/289$。

除“有形”物体的惯性质量外，还有“无形”的与能量相联系的惯性质量，像引力场能、放射能、原子和原子核的结合能……都对应着惯性质量，研究表明，这些能量也都对应着引力质量，并且引力质量等于惯性质量。

2.1.2 等效原理

$m_i = m_g$ 的事实早为人知，但其中蕴含的自然界的“秘密”未被揭开，后来爱因斯坦在苦思如何解决引力问题和加速系问题时从中受到启发：“这个难题的突破点突然在某一天找到了……如果一个人正在自由下落，他决不会感到他有重量……它使我由此找到了新的引力理论。”① 新的引力理论建立

---

① 威尔特、S. R.，M. 裴利普编. 现代物理学进展. 魏凤文等译. 湖南教育出版社（1990）.

了，自然界的这个“秘密”也就揭开了。

在牛顿力学中，非惯性系与惯性系的区别在于前者存在惯性力，惯性力正比于 m_i。由于万有引力正比于 m_g，所以 $m_i = m_g$ 就引出两力的等价性或等效性。设想在一个密闭的小室中做自由落体实验，测出落体的加速度为 g，根据牛顿定律有二种可能：(1)小室静止在地面，地球引力使落体具有加速度 g；(2)小室在自由空间相对惯性系向上做加速度为 g 的匀加速直线运动，以小室为参考系，物体受到向下的惯性力，惯性力使其产生向下的加速度 g。单凭小室内的自由落体实验，小室里的人无法确定是哪一种情况，也就是说，无法区分作用在落体上的是引力还是惯性力。实际上，在这样的小室中做任何力学实验，都无法区分引力和惯性力。再设想一个在地球表面自由下落的小室，以小室为参考系，任何物体所受的惯性力和重力完全抵消，因此在其中做任何力学实验都看不到地球引力的影响。这就是引力和惯性力在力学实验上的等效性。当然，真实的引力场和惯性力场还是有区别的，例如地球的引力场是中心力场，引力指向地心；自由下落小室的惯性力场是均匀的，各处的惯性力彼此平行。所以如果小室比较大而且实验的精度极高，那么若在小室内 A 处惯性力与地球引力完全抵消，在其他各处惯性力与引力就不能完全抵消，离 A 较远处就可观测到地球引力的影响，所以严格地讲只是**在时空某一点的微小邻域(以后称为局域)上引力与惯性力等效**，这就是等效原理的弱形式或称之为**弱等效原理**。它实质上是 $m_i = m_g$ 的另一表述。有人直接将 $m_i = m_g$ 称为弱等效原理。

弱等效原理直接来自实验事实，仅仅是在力学实验上等效，在弱等效原理的基础上不可能构建新的引力理论。爱因斯坦的贡献是将弱等效原理推广为**强等效原理：惯性力与引力**

的任何物理效应在局域内等效。这是个大胆的假设，就在强等效原理(下面简称等效原理)的基础上，爱因斯坦按全新的引力几何化途径解决引力问题建立起广义相对论。

引力与惯性力在局域内等效并不意味着引力与惯性力等同，引力与惯性力有本质的区别。引力场由物质产生，充满了整个宇宙。选一个附着在引力场中自由下落质点上的参考系，只能在质点的邻域内消除引力，不可能在整个空间消除引力。有限物质产生的引力场，在距物质无穷远处其强度趋于零。引力造成时空弯曲。而惯性力是由于选择非惯性参考系引起的，换成惯性系就没有惯性力，或者说消除了惯性力。对平动的非惯性系，无穷远处惯性力并不为零；对旋转的非惯性系，无穷远处惯性力可以为无穷大。有惯性力的区域里时空有可能保持平坦。归根到底，造成时空弯曲的是物质及其运动。

2.1.3 广义相对论中的局域惯性系

惯性参考系是牛顿力学的基本概念之一，牛顿力学是惯性系的力学规律。牛顿力学的惯性系是指惯性定律成立的参考系，在此参考系中不受力的物体将保持静止或匀速直线运动状态。反过来讲，严格的惯性系相对于不受力的物体也是静止或匀速直线运动状态。按此定义找严格的惯性系非常困难，或者说找不到严格的惯性系，因为无法完全避开引力的作用，所以不存在完全不受力的物体，从逻辑上讲也就无法确定严格的惯性系。实际应用的惯性系都不是严格的，其中恒星参考系是相当好的惯性系。牛顿力学中的惯性系尺度可以无限延伸，可以有无数的惯性系，彼此间作匀速直线运动。

狭义相对论也是惯性系的自然规律，但是相对论的惯性系与牛顿力学的惯性系大不相同。

广义相对论是在狭义相对论基础上发展起来的。爱因斯

坦指出它们之间的关系："一个理论本身指出创立一个更为全面的理论的道路，而在这更为全面的理论中，原来的理论作为一个极限情况继续存在下去。"[1]狭义相对论就是广义相对论中引力为零的特殊情况下的理论。为使特殊情况与普遍情况相区别，广义相对论中也用惯性系概念，称狭义相对论成立的参考系或引力为零的参考系为惯性系。与牛顿力学不同，相对论的惯性系很容易确定。在引力场中自由降落的物体构成的局域参考系中，引力完全被惯性力抵消，由等效原理，惯性力与引力等价，因此按广义相对论的观点此局域内总引力为零即为惯性系，称为局域惯性参考系(下面简称为局惯系)。由于有限区域内引力不能完全与惯性力抵消，所以广义相对论不存在有限区域的严格惯性系，在实际问题中，"局域"的大小取决于引力场的强弱以及问题的精度要求。引力场中每一点可以有无数的局惯系，它们相对该点的加速度相同，彼此间做匀速直线运动。但是引力场中不同地点的局惯系相对引力场(设引力场为静止不动的)的加速度各不相同，因此各地点的局惯系彼此之间为变速运动，不再保持匀速直线运动状态，这正体现出引力场的影响。按牛顿力学观点，恒星外面的自由落体构成的参考系——广义相对论的局惯系——绝对不是惯性系，因为有加速度；按广义相对论观点，恒星参考系——牛顿力学的好惯性系——绝对不是惯性系，因为有引力存在。

在局惯系内不受力(包括惯性力)的物体将保持静止或匀速直线运动的状态，这可以看作广义相对论的惯性定律。自由飞行的飞船中，物体可以悬在空中相对飞船保持静止就是一

---

① 爱因斯坦,A.著.狭义与广义相对论浅说.杨润殷译,上海科学技术出版社(1964).

例。广义相对论的惯性定律与牛顿力学的惯性定律的不同之处在于,前者的力包括惯性力,惯性力与引力抵消可以看作不受力。

有了局惯系概念,等效原理可以更准确地叙述为:**引力场中任意时空点,总能建立一个局域惯性系,在此参考系内,狭义相对论所确定的物理规律都成立。**

2.2 广义相对性原理

前面讲狭义相对性原理在狭义相对论中起着最基本的至关重要的作用,是狭义相对论的奠基石。实际上,相对性原理是整个相对论的奠基石,爱因斯坦正是由此将他的理论命名为相对论。相对论分为狭义相对论和广义相对论两部分,分别来自狭义和广义相对性原理。所以理解相对性原理对了解和掌握相对论有头等重要意义。为此,我们再回顾力学相对性原理和狭义相对性原理。

2.2.1 力学相对性原理和狭义相对性原理的回顾

伽利略讨论相对性原理时,从人们日常生活现象谈起。他对此有生动的描述:[①]"把你和一些朋友关在一条大船甲板下的主舱里,再让你们带几只苍蝇、蝴蝶和其他小飞虫。舱内放一只大水碗,其中放几条鱼。然后,挂上一个水瓶,让水一滴一滴地滴到下面一个宽口罐里,船停着不动时,你留神观察,小虫都以等速向舱内各方向飞行,鱼向各个方向随便游动,水滴滴进下面的罐子中。你把任何东西扔给你的朋友时,只要距离相等,向这一方向不必比另一方向用更多的力,你双脚齐跳,

---

① 伽利略,G.,关于哥白尼和托勒密两大世界体系的对话,上海外国自然科学哲学著作编译组译.上海人民出版社(1974).

无论向哪个方向跳过的距离都相等。当你仔细地观察这些事情后（虽然船停止时，事情无疑一定是这样发生的），再使船以任何速度前进，只要运动是匀速的，也不忽左忽右地摆动。你将发现，所有上述现象丝毫没有变化，你也无法从其中任何一个现象来确定，船是在运动还是停着不动。即使船运动得相当快，在跳跃时，你将和以前一样，在舱底板上跳过相同的距离，你跳向船尾也不会比跳向船头来得远，虽然你跳在空中时，脚下的船底板向着你跳的相反方向移动。你把不论什么东西扔给你的同伴时，不论他是在船头还是在船尾，只要你站在对面，你也并不需要用更多的力。水滴将像先前一样，滴进下面的罐子，一滴也不会滴向船尾，虽然水滴在空中时，船已行驶了许多拃。鱼在水中游向碗前部所用的力，不比游向水碗后部来得大；它们一样悠闲地游向放在水碗边缘任何地方的食饵。最后蝴蝶和苍蝇将继续随便地到处飞行，它们也决不向船尾集中，并不因为它们可能长时间留在空中，脱离了船的运动，为赶上船的运动显出累的样子。如果点香烟，则将看到烟像一朵云一样向上升起，不向任何一边移动。所有这些一致的现象，其原因在于船的运动是船上一切事物所共有的，也是空气所共有的。这正是为什么我说，你应该在甲板下面的缘故；因为如果这实验是在露天进行，就不会跟上船的运动，那样上述某些现象就会发现或多或少的显著差别。毫无疑问，烟会同空气本身一样远远落在后面。至于苍蝇、蝴蝶，如果它们脱离船的运动有一段可观的距离，由于空气的阻力，就不能跟上船的运动。但如果它们靠近船，那么，由于船是完整的结构，带着附近一部分空气，所以，它们将不费力，也没有阻碍地会跟上船的运动。”

这些简单的人们司空见惯的事实，其实包含着物理学上

最重要的规律之一，即关于物理规律的规律——相对性原理。由于当时最完整、最严密的学科为力学，所以只讨论力学规律；由于是在古典力学基础上讨论的，所以只是惯性参考系彼此平权，惯性系之间的坐标变换为伽利略变换。这样的相对性原理称之为力学相对性原理或伽利略相对性原理。虽然它不完全正确，但是，它是首先涉及相对性原理的。如果能理解力学相对性原理的基本思想和本质，对学习爱因斯坦相对性原理很有好处。

第 1 章指出，力学规律可以用数学表达式或数学方程来定量描述。因此，力学相对性原理，即各惯性系中力学规律相同，就体现在力学规律的数学表达式在各惯性系中形式相同，也就是力学定律的形式不变。下面作更详细的讨论。

力学规律是关于物理量之间的关系以及物理量的发展、变化的规律。若物理量在惯性系 S 中用 P_1、P_2、……表示，力学规律就表达为方程

$$F(P_1, P_2, \cdots) = 0$$

在另一惯性系 S' 中，这些物理量变换为 P_1'、P_2'、……由力学相对性原理，在 S' 中 P_1'、P_2'、……也要满足同样形式的方程

$$F(P_1', P_2', \cdots) = 0$$

所以力学相对性原理涉及到物理量在不同参考系之间的变换。为了定量描述和确定不同参考系之间物理量的变换，通常用固定在参考系中的坐标系代表该参考系，那么改变参考系对物理量的影响，就体现在坐标变换对物理量的影响。这样，物理量在不同参考系之间的变换通常称之为相应坐标变换下的变换。在进行坐标变换时不发生改变的物理量，称之为该坐标变换的不变量。经典力学中代表惯性系之间的坐标变换就是上述的伽利略变换，所以力学相对性原理要求力学定律所

涉及的物理量在伽利略变换下的变换具有一定的关系，从而保证力学定律的形式不变。如果各物理量都是伽利略变换下的不变量，当然方程形式不变，称此方程为不变式；若物理量虽然改变但变换规律相同，也使方程继续成立，称方程为协变式。若方程为某变换的不变式或协变式统称为方程具有某变换的协变性。因此力学相对性原理要求代表力学定律的数学方程为伽利略坐标变换下的不变式或协变式，或者说数学方程具有伽利略变换下的协变性。反过来，如果代表某力学定律的数学方程具有伽利略坐标变换下的协变性，则说明该力学定律满足力学相对性原理。下面就由力学定律在伽利略变换下的协变性来说明力学相对性原理的存在。

经典力学基础是牛顿运动定律，如果牛顿定律满足相对性原理，那么一切经典力学定律都满足相对性原理。

牛顿定律涉及三个物理量：加速度 $\boldsymbol{a}$、惯性质量 m、力 $\boldsymbol{F}$。首先假设牛顿三定律在某惯性系 S 中成立，即：(1)不受力物体加速度为零，可以用 $\boldsymbol{a}=0$ 作为第一定律的数学表达式；(2)质量为 m 的质点，受合外力为 $\boldsymbol{F}$ 时，其加速度为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}/m$；(3)作用力与反作用力大小相等方向相反，在两质点的连线上，即 $\boldsymbol{F}_{12}=-\boldsymbol{F}_{21}$。设 S' 为任意的另外的惯性系，与 S 系的坐标变换为(1.1.2)式表示的伽利略变换，于是立刻有(1.1.7)式 $\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{a}$，即加速度为坐标变换不变量，由此在 S' 系中，不受力物体的加速度也为零。在经典情况下，质量作为表示物体内在惯性的恒量，与物体运动状态无关，也是坐标变换不变量，即

$$m' = m \tag{2.2.1}$$

满足牛顿第二定律的力，一般只取决于两质点的相对位置，即完全由相对位置矢量 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$ 决定。由伽利略坐标变换(1.1.3)式，$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}_2'-\boldsymbol{r}_1'=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}$，所以 $\boldsymbol{r}$ 也是坐标变换不

变量，因此这样的力在坐标变换下也保持不变，即

$$F' = F \tag{2.2.2}$$

由此，在 S' 系中作用力与反作用力也必然大小相等方向相反，作用在两质点的连线上，即 $F_{12}' = -F_{21}'$。最后，由于 a、m、F 都是坐标变换不变量，牛顿第二定律的表达式也自然是坐标变换不变式，这样，牛顿三定律的数学方程具有伽利略变换下的协变性，说明对牛顿定律存在着相对性原理，即在与伽利略变换相对应的所有惯性系中具有相同的形式，从而经典力学存在力学相对性原理。

顺便说一下，如果我们首先能确认力学定律满足相对性原理，那么牛顿第二定律关系式应该在伽利略变换下具有协变性，从而也决定了 a、m、F 的变换规律。例如若已经确定 $a'=a$、$m'=m$，则可由此确定满足牛顿定律及相对性原理的力必有变换关系 $F'=F$。

上述关于力学相对性原理的讨论完全可以推广到狭义相对性原理和广义相对性原理。狭义相对性原理指出，一切物理规律对所有惯性系都相同，即代表物理定律的数学方程为洛伦兹变换下的不变式或协变式，或者说数学方程具有洛伦兹变换下的协变性。反过来，要说明某物理定律满足狭义相对性原理，代表该物理定律的数学方程就必须具有洛伦兹变换下的协变性。在 1.3 节中就是利用动量守恒定律（动量定理）在洛伦兹坐标变换下的协变性得到了相对论质量 m 的表达式；在 1.4 节利用动量定理 $F=\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ 在洛伦兹坐标变换下的协变性得到了 F 的相对论变换。此外，爱因斯坦令 $mc^2=E$ 作为物质的总能量，于是(1.3.16)式 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t=F\cdot v$ 就具有动能定理的意义，由 E、t、F、v 的相对论变换可以验证此式在洛伦兹变换下形式不变，说明动能定理满足狭义相对性原理。

2.2.2 广义相对性原理

上面我们着重讨论了力学相对性原理和狭义相对性原理。从力学相对性原理(只适用于力学规律)发展到狭义相对性原理(适用于所有物理规律)。狭义相对性原理指出,物理定律在一切惯性系都具有相同的形式,即对物理规律来说一切惯性系都是平等的。因此虽然狭义相对性原理比起力学相对性原理有了重大飞跃,但是仍然保留了惯性系的特殊地位。一般参考系相对惯性系有加速度,出现惯性力。正是惯性力造成加速系与惯性系的差别。人们一直认为这种差别是不可能消除的,即加速系不可能与惯性系平等。等效原理的提出,使得消除加速系与惯性系的差别有了可能。

爱因斯坦在提出等效原理的同时,"决定把相对性扩展到加速参考系中……在完成这一步的同时……还能把引力问题一并解决"[1],在等效原理的基础上提出了广义相对论的另一个基本假设或基本原理——**广义相对性原理:物理定律在一切参考系中都具有相同的形式,或者说物理规律的表述都相同,即它们在任意坐标变换下都具有协变性**。如上所述,所谓定律的协变性,就是在坐标变换下定律的公式或方程的形式不变性。这样对物理规律而言一切参考系都平等,彻底消除了惯性系的特殊地位。

等效原理是广义相对性原理成立的必要前提,正是由于引力与惯性力等效,可以把惯性力当作引力对待,才去掉了加速系与惯性系的本质差别,使加速系与惯性系平等。但是广义相对性原理并不是等效原理的推论。等效原理指出,引力场中

---

① 威尔特,S.R.,M.裴利普编,现代物理学进展.魏凤文等泽,湖南教育出版社(1970).

任意点都可以引入局惯系，局惯系内狭义相对论成立，也就是一切不涉及引力和惯性力的物理规律成立；广义相对性原理指出，物理规律在此局惯系和该点的其他任意参考系中表述都相同，或者说表达物理定律的方程在坐标变换下形式不变，这些任意参考系包括加速系，也包含了引力场。这样通过坐标变换就可以把无引力的狭义相对论的物理定律转换到引力场中去，引力场的影响体现在坐标变换关系上，从而解决了引力问题，即爱因斯坦所说的一并解决引力问题。另一方面，一个正确的物理定律应该满足广义相对性原理，具有坐标变换下的协变性。

等效原理和广义相对性原理是广义相对论的两个基本原理。由这两个原理出发，就可以一起解决引力和加速系问题，构建起广义相对论理论。

涉及加速系后，参考系观念也有所改变，不再有严格的绝对的刚性参考系。考虑参考系 S' 按通常意义由彼此相对静止的物体构成，按 S' 系观点认为自己是个刚性参考系，由刚性框架组成。设 S' 系相对另一个参考系 S 作加速运动，在 S 系看 S' 系是运动的，沿运动方向上的每一段长度为动长，相对静长都存在洛伦兹收缩，收缩比例为 $\sqrt{1-v^2/c^2}$，其中 v 为 S' 系中该段长度的速度。v 随时间不断变化，为表述方便设速率 v 不断增加，这样 S 系看 S' 系在运动方向上每段长度随时间不断减小，于是 S' 系的框架沿运动方向上不断收缩，S 系认为 S' 系不再是刚性的。因此在广义相对论中，只有内禀刚性参考系，不存在各参考系都承认的刚性参考系。

2.2.3　光线偏折和时空弯曲

利用这两个基本原理，马上可以得到许多重要的推论，使我们对引力场中的时空有初步的了解。

首先，由等效原理就可以直接推论光线在引力场中必然偏离直线，推论过程中不必考虑引力是否对光子有作用的问题。引力场中自由下落的小室是局惯系，在此参考系中狭义相对论成立，光线沿直线传播，如图 2.2.1 虚线所示，一条光线在局惯系内从左向右沿直线穿过小室。以引力场为参考系观察这条光线，该光线在向右传播过程中，还随小室一起以引力场强 g 为加速度向下加速运动，因此引力场中观察者看到的光线向下（引力方向）偏折，如图 2.2.1 中实线所示。这样由等效原理就直接推证出光线要向引力方向偏折，反过来，光线在引力场是否偏折，是广义相对论是否成立的生死攸关的检验。

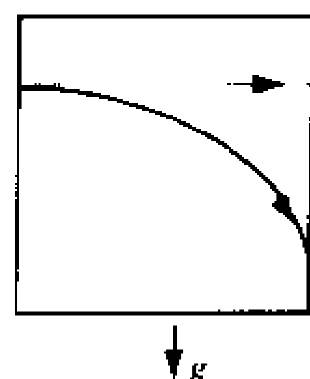


图 2.2.1

实验观测的是恒星发的光在太阳引力场的偏折。恒星发光通过引力极弱的空间基本上沿直线到达地球，见图 2.2.2(1)中虚线；当太阳运动到光线附近时，太阳引力场使光线与

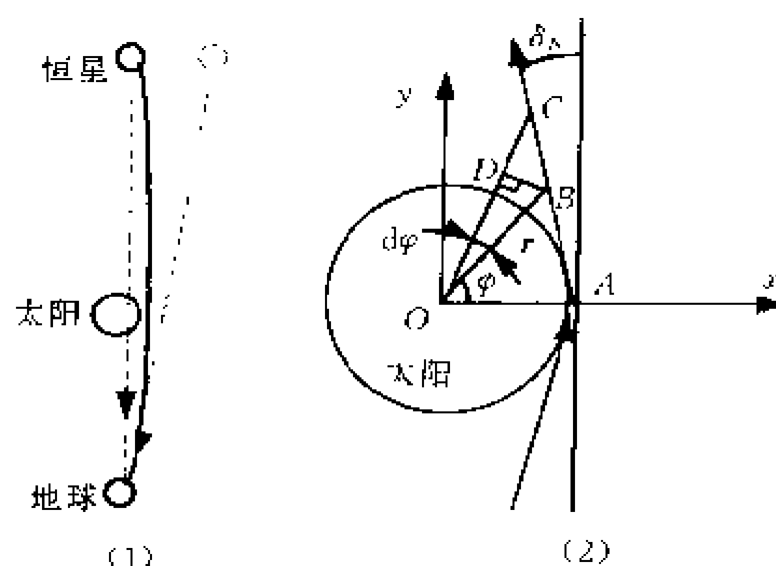


图 2.2.2

原来直线产生可测量的偏离，见图 2.2.2(1)中实线，于是看到的恒星位置发生了变化。普通日子里，强烈的太阳光掩盖住星光使观测无法进行，只有在日全食时才可以观测到经过太阳边缘的恒星光。但是仅测出光线有偏折还不够，因为按牛顿力学也可以解释光线的偏折，所以还要有定量的结果，才可以判断是哪个理论的预言正确。

在牛顿力学中，考虑到光子具有能量 $h\nu$，再由爱因斯坦质能关系，光子具有质量 $m=h\nu/c^2$，在经过太阳附近时受太阳引力为：

$$\boldsymbol{F}=GM_{\odot}m\boldsymbol{r}/r^3 \tag{2.2.3}$$

见图 2.2.2(2)。于是光子受到的 x 方向的分力为

$$F_x=-F\cos\varphi$$

在近日点 A 处，光子 x 方向速度分量为零：

$$v_x(r)|_{r=R_{\odot}}=v_x(R_{\odot})=0$$

由动量定理

$$mv_x(\infty)-mv_x(R_{\odot})=\int F_x\mathrm{d}t=\int_{r=R_{\odot}}^{r=\infty}\frac{F_x\mathrm{d}l}{c}$$

如图 2.2.2(2)所示，光子真实轨迹可以近似为与 y 轴偏角为 $\delta_N(\delta_N\ll1)$ 的直线，于是

$$dl=r\mathrm{d}\varphi/\cos\alpha\approx r\mathrm{d}\varphi/\cos(\varphi-\delta_N)\approx r\mathrm{d}\varphi/\cos\varphi$$

再由 $r\cos\varphi\approx R_{\odot}$，将 F_x 代入，得

$$\begin{aligned}mv_x(\infty)&\approx-\frac{GM_{\odot}m}{cR_{\odot}}\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\\&=-\frac{GM_{\odot}m}{cR_{\odot}}\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

这样

$$v_x(\infty)\approx-\frac{GM_{\odot}}{cR_{\odot}}$$

牛顿力学计算的单向偏角

$$\delta_N \approx \sin\delta_N = \frac{|v_x(\infty)|}{c} = \frac{GM_\odot}{c^2R_\odot} \qquad (2.2.5)$$

总偏向角

$$d\varphi_N = 2\delta_N = \frac{2GM_\odot}{c^2R_\odot} = 0.875'' \qquad (2.2.6)$$

按广义相对论，爱因斯坦在1915年计算出偏转角为上述角度的2倍[1]。1919年5月29日日全食，两组英国科学家首次测量光线偏折角：在西非几内亚湾普林西比岛测量结果为1.98±0.16″；在巴西北部测量结果为1.61±0.40″。测量结果符合广义相对论的预言引起举世轰动，从而奠定了广义相对论的地位。以后凡有日全食时都要进行类似观测，迄今为止共测了几百颗恒星的光线，基本上都与广义相对论的理论值符合。以后又用射电波进行测量，测射电波的偏转，精度大大提高，1975年测得偏转角为1.761±0.016″，与广义相对论理论值相当符合。

更详细的分析、计算表明，牛顿力学和广义相对论的计算结果不同，来自两种理论的时空结构不同。牛顿的三维空间与时间无关，为平直的欧几里德空间。平直空间的特征是空间的测地线（又叫极值线或短程线，指空间两点之间的各条连线中长度为极值的那条路线）为直线。狭义相对论的三维空间与时间相联系构成四维的闵可夫斯基空间。闵可夫斯基空间中没有引力，四维时空是平直的，三维纯空间也是平直的，因此在狭义相对论的三维纯空间里才有直线的概念，光线沿直线传播。在建立完整的广义相对论之前，爱因斯坦在1911年也曾

---

① 范岱年等编译．爱因斯坦文集（二）．商务印书馆（1977）．

计算过光线通过太阳引力的偏折角[①]，当时他是按均匀引力场（实质上是平直空间）来计算的，结果与牛顿力学结果相同，也是0.875″。所以，如果是平直空间的话，引力引起的偏折角只能是0.875″。广义相对论第一次向世人指出：引力场中的四维时空和三维纯空间都是弯曲的（具体的弯曲空间概念在下一章中介绍）。在光线偏折现象中，引力起了双重作用：(1)使三维空间弯曲，测地线不再是直线，偏离原来平直空间的直线0.875″。(2)使光线偏离三维空间测地线0.875″，无论是在平直空间还是在弯曲空间都是如此。两种作用合起来使光线偏离原来的直线1.75″。实验观测的事实支持了广义相对论的预言，也直接地确切无疑地证实引力场中的空间是弯曲的，这正是光线偏折实验观测的重要性所在。

2.2.4 引力几何化·爱因斯坦场方程

由于$m_i=m_g$，所以按牛顿理论仅受引力作用的粒子（广义相对论中称为自由粒子）在引力场中的加速度是确定的，就是引力场强度g，与粒子的本身性质无关。这样在确定的引力场中，任意自由粒子的运动规律都相同，如果初始条件相同的话运动轨迹也都相同，也就是说自由粒子的运动完全由引力场决定。这是引力场独有的性质，任何其他的力场都没有这样的性质。例如在电磁场中，带电粒子的运动不但与电磁场有关，还与其所带电荷有关，因此在同一电磁场中，不同带电粒子的运动规律可以完全不同。我们知道，在惯性系中自由粒子沿直线运动。直线是平直空间的测地线，所以在惯性系中自由粒子沿测地线运动；按广义相对性原理，在有引力的弯曲时空里，自由粒子也应该沿弯曲时空的测地线运动，这就是测地线

---

① 范岱年等编译，爱因斯坦文集（二），商务印书馆(1977).

假设。自由粒子的运动惟一地由引力场决定，意味着时空的测地线惟一地由引力场决定。微分几何理论指出，空间的几何性质，如是否弯曲、弯曲的程度等等，与空间的测地线相对应，因而时空的几何结构就完全由引力决定。反过来，引力对自由粒子的作用可以通过研究空间的几何结构来着手。这样的研究、处理引力的方法称为引力几何化。所以爱因斯坦的关于引力的理论又称为引力的几何理论，以区别于其他研究引力的理论方法。除爱因斯坦的广义相对论外，还有许多人研究解决引力问题的其他途径，提出一些理论方法。但迄今为止，最简单、明确并且经得起实验和观测检验的仍然只是爱因斯坦的理论。

在爱因斯坦的“引力”理论中，已经没有牛顿意义下的引力，存在的只有时空的结构，因此爱因斯坦的广义相对论又称为没有引力的“引力”理论。我们在下面有时还使用引力概念，只是为了方便或者为了与牛顿理论比较。

时空的性质由“引力”决定，即由产生引力的物质决定，它们之间的关系是广义相对论最核心的内容。爱因斯坦场方程即表达物质及其运动与时空的几何结构的关系，后面将介绍爱因斯坦场方程的具体形式。爱因斯坦场方程在弱场情况下近似为牛顿的引力场方程，相当于牛顿的万有引力定律。时空的几何结构确定之后，由微分几何的基本关系式可以建立时空的测地线方程，如前所述，自由粒子沿时空的测地线运动，所以时空的测地线方程就是自由粒子的运动方程。在弱场情况下若粒子低速运动，测地线方程就近似为牛顿力学中质点在引力场中的动力学方程。

爱因斯坦将引力几何化后，就是这样处理引力问题的。

爱因斯坦的相对论是 20 世纪物理学最伟大的成就之一，

和量子物理一起成为近代物理的柱石。相对论刚产生的时候即引起很大轰动，也引起极大的争论，并未被大多数人承认，特别是广义相对论，尽管有行星近日点进动和光线偏折的证实，但引发的争论最多。实际上在一般场合包括普通的星体，在不太大的天文距离内，广义相对论的效应很小，都可以忽略，可以观测到的实验验证也很少。诺贝尔物理学奖授与爱因斯坦的动议酝酿多年，但由于有不少人对相对论有争议而迟迟不能确定下来，直到 1922 年瑞典科学家决定回避相对论的争议，以爱因斯坦对光电效应等贡献授予他 1921 年诺贝尔物理学奖，将 1922 年度奖授予玻尔。以后几十年的研究和实验证明了相对论的正确性，特别是五六十年代以来天文学、天体物理、宇宙学的重大发现和发展，都以相对论为理论基础，使这些古老科学成了自然科学的前沿和热点，也促进了对相对论理论的肯定和进一步研究。

第3章 广义相对论的时间与空间

长度和时间是物理学中最基本的物理量，几乎所有的物理测量都来自长度和时间，对长度、空间、时间的正确认识和测量是整个物理学的基础。随着物理学的发展，从牛顿的绝对时间和空间，到狭义相对论的四维平直时空，再到广义相对论的由物质分布及其运动决定的四维弯曲时空，人们对时间和空间的认识有了巨大的飞跃。时间、空间、物质密不可分，它们之间的辩证关系在广义相对论中得到了最充分的体现。

前面多次讲到空间的平直和弯曲，但是并没有加以解释。下面我们讨论什么是空间的弯曲，什么样的空间是平直的，什么样的空间是弯曲的，如何判断空间是平直的还是弯曲的，平直空间与弯曲空间在性质上有什么区别等等问题。

3.1 弯曲时空

3.1.1 弯曲空间概念

从前我们涉及的都是平直空间——三维欧几里德空间和四维的闵可夫斯基空间。平直空间的几何学是欧几里德几何，直线是其测地线，圆周率和三角形内角和都是 π。现在我们知道，我们所处的物理空间中有引力存在，空间是弯曲的。弯曲空间适用的几何学为黎曼几何。在弯曲空间中没有直线概念，代替直线的是测地线，由三条测地线构成的三角形内角和不是 π，圆周率也不是 π。所以简单、直观地说，弯曲空间就是测

地线不是直线的空间。但是这种说法对了解和判断空间是否弯曲并没有多大的帮助，因为置身于弯曲空间的人“看”不出也感觉不到所处空间的测地线的弯曲，他没有“直”的标准。对太阳引力场的观察者而言，光线偏离直线 1.75″也是没有意义的，他所能测量的是光线相对于测地线的偏离。“不识庐山真面目，只缘身在此山中”，只有处于高维平直空间的旁观者，才可以直观地看到低维弯曲空间和与它同维的平直空间的区别。例如在欧氏空间中直线是一维平直空间，曲线是一维弯曲空间；平面是二维平直空间，曲面是二维弯曲空间，图 3.1.1 所示球面是曲率为正常数的二维弯曲空间。在球面上不存在直线，它的测地线为大圆曲线（过球心的平面在球面上截出的曲线称为大圆曲线）。以球面上 P 点为中心，测地线 PQ 弧长为半径 R 做圆周，从图 3.1.1可以很清楚地看到圆周的周长为 $2\pi r$ 以及 r 小于 R。但是图 3.1.1是位于欧几里得三维平直空间的人才可以看到的图形，生活在二维圆周上的“人”是看不到这个图形的，也不知道半径 r。测地线弧长 PQ 就是他们的“直线”，圆周的周长除以“直径”$2R$ 为他们的圆周率 π'，即

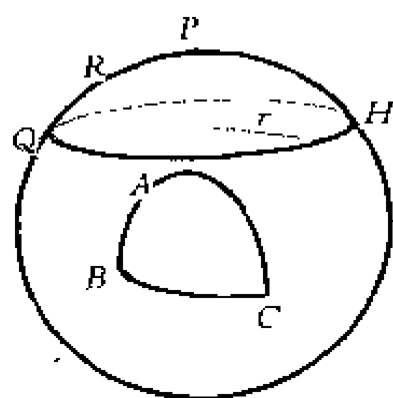


图 3.1.1

$$\pi' = \frac{2\pi r}{2R} = \frac{r}{R}\pi < \pi \qquad (3.1.1)$$

可见球面上圆周率小于 π。球面上三条大圆曲线构成球面三角形 ABC，其内角和大于 π。

于是人们想到，虽然我们“感觉”不到所处的物理空间是否平直，但我们可以通过测量来判断它是否平直。即测量空间

中以测地线为半径构成的圆（称为测地圆）的周长，或是测量以测地线为半径构成的球（称为测地球）的表面积，看圆周率是否为 π，或是测量测地线构成的三角形内角和看是否为 π。远在爱因斯坦提出广义相对论之前，在非欧几何诞生之后，人们就想用测量方法判断实际空间是欧几里得的还是非欧几里得的。数学家高斯在 1821～1823 年期间精确测量了德国境内三个山顶构成的三角形内角和，结果为 179°59.320′，在测量精度内分不出与 π 的区别，无法对此问题作出确切结论。百年后广义相对论解决了这个问题，说明有物质存在的空间是弯曲的，即是非欧的，并得到实验验证。应用广义相对论可以计算出弯曲空间的曲率半径。如地球表面径向线的曲率半径为 3.43×10^{11} m。如此大的曲率半径，说明地球引力场中空间虽然弯曲，但与平直空间差别极小，无怪乎高斯"小尺度"的测量分辨不出我们所处的空间的平直与弯曲。实际上即使在太阳系或银河系内，按平直空间计算的星体运动规律也与实测相符，广义相对论效应（包括空间弯曲的影响）极小。

除了上述实际引力场中空间的弯曲之外，还可以从理论上讨论旋转非惯性系中空间的弯曲。设在惯性系 S 中有一个以角速度 ω 匀速转动的圆盘（称之为爱因斯坦转盘，类似在狭义相对论中讨论同时性的相对性时采用的爱因斯坦列车），圆盘静止时半径为 R。我们并不在转盘参考系 S' 中做实际测量来确定圆周率，因为一来测量精度有限，二来我们并不知道在 S' 系中各处的时钟、尺子是否相同，即使有了测量结果也无法利用，因此要在 S 系中利用狭义相对论的知识推测 S' 系的测量结果。在 S 系中时钟、尺子都是统一的。考虑圆盘上沿径向的一小段长度 dr'，它与运动方向垂直不产生洛伦兹收缩，所以在 S' 系测量与 S 系测量结果相同，即圆盘的转动对

其径向长度的测量无影响，圆盘的半径在 S 系和 S' 系测量相同，等于静长 R。在 S 系看圆盘边缘是半径为 R 的圆周。S 系空间是平直的，圆周率为 π，所以 S 系测圆盘周长为 $2\pi R$。考虑圆周上的一小段长度 dl'，具有速度 $v=\omega R$，运动方向沿 dl'，因此有洛伦兹收缩。在圆盘上测量的长度 dl' 为静长，在 S 系测量的长度 dl 为动长，因此

$$dl' = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}dl = (1 - \omega^2R^2/c^2)^{-1/2}dl$$

S 系测量的周长 $2\pi R$ 为动长，在 S' 系测量圆盘的静周长就应该是 $2\pi R(1-\omega^2R^2/c^2)^{-1/2}$。$S'$ 系中圆周率 π' 为圆盘周长与直径之比，因此

$$\pi' = \pi(1 - \omega^2R^2/c^2)^{-1/2} > \pi \qquad (3.1.2)$$

说明圆盘参考系中的空间不再平直，而是弯曲的黎曼空间。S' 系是旋转非惯性系，按牛顿力学存在惯性离心力，而由等效原理，惯性离心力等效为径向引力场。所以 S' 系观察者解释空间弯曲的原因是存在引力。这就在理论上由空间的圆周率不等于 π 推断引力场中空间的弯曲。需要说明的是，S' 系等效的不是真实的引力场，它的性质与真实引力场有很大的不同，所以我们不对它做更多的讨论。

3.1.2 弯曲时空的数学描述——黎曼几何及其度规

弯曲空间的几何与平直空间的几何有本质的不同。现在讨论的不是欧氏几何中具体的几何问题，而是哪一种几何的更高层次的关于空间本身性质的问题。欧氏几何和非欧几何都包括在黎曼几何中，无引力的平直空间和有引力的弯曲时空都包括在黎曼空间内。注意现在讲的“空间”有两个含义：(1)纯空间，即不包含时间的通常意义上的空间。通常意义上的空间最高为三维。(2)数学上的广义的空间，可以包含时间在内，维数也不限于三维，如闵可夫斯基空间为四维平直时

空。下面为了避免混淆，除了在涉及黎曼空间以及四维的闵可夫斯基空间外，我们所提到的空间都指纯空间。

黎曼空间的主要特征是定义了空间中相邻两点之间的距离 ds（也称为线元）。且 ds^2 是坐标微分的二次型，在坐标变换下保持不变。在欧氏空间中

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{3.1.3}$$

在闵可夫斯基空间中（见(1.4.7)式，又称为时空间隔）

$$ds^2 = c^2dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

在弯曲的四维时空，ds^2 要复杂得多，最普遍的形式是坐标微分的二次型：

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu \quad (\mu,\nu = 0,1,2,3)^{①} \tag{3.1.4}$$

这里求和记号 $\sum\limits_{\mu,\nu}$ 表示 μ 和 ν 依次取 0,1,2,3，分别组成 16 项和式为

$$\begin{aligned} ds^2 = & g_{00}dx_0dx_0 + g_{01}dx_0dx_1 + g_{02}dx_0dx_2 + g_{03}dx_0dx_3 + \\ & g_{10}dx_1dx_0 + g_{11}dx_1dx_1 + g_{12}dx_1dx_2 + \cdots + \\ & g_{23}dx_2dx_3 + g_{30}dx_3dx_0 + g_{31}dx_3dx_1 + g_{32}dx_3dx_2 + \\ & g_{33}dx_3dx_3 \end{aligned}$$

其中 $g_{\mu\nu}$ 是求和项的系数。为简单起见，还可以将求和式写成矩阵的形式

$$ds^2 = [dx_0\ dx_1\ dx_2\ dx_3]\begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dx_0 \\ dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} \tag{3.1.5}$$

① 在微分几何中要区分协变和逆变张量。我们不涉及张量，当然也不涉及协变和逆变张量，因此这里的求和也用普通的求和号。

在矩阵形式中，$g_{\mu\nu}(\mu,\nu=0,1,2,3)$成为 4×4 的矩阵，称为空间的度规(度规矩阵或度规张量。实际上，一阶张量可以用行或列矩阵表示，二阶张量可以用矩阵表示)，并取度规矩阵为对称矩阵：$g_{\mu\nu}=g_{\nu\mu}$。以后我们约定，凡是用希腊字母作为脚标，其取值范围都是 0～3，凡是用英文字母作为脚标，其取值范围都是 1～3。在讨论四维时空时，取

$$dx_0 = c dt \tag{3.1.6}$$

x_1,x_2,x_3 为空间坐标；对直角坐标系 $x_1=x,x_2=y,x_3=z$。例如：直角坐标系中欧几里得空间的度规矩阵为

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \tag{3.1.7}$$

闵可夫斯基空间的度规矩阵为

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} \tag{3.1.8}$$

度规决定了空间的性质，如空间是否弯曲、弯曲的曲率、二点间距离、测地线等等。所以有了空间度规，就等于确定了该空间。黎曼空间的一个定理就指出度规与空间平直性的关系：**若适当选择坐标系后度规成为常数的黎曼空间都是平直的，反过来若黎曼空间平直，则总可以找到合适的坐标系使度规为常数，常数度规可对角化为类似闵氏空间的形式**

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} \pm 1 & \mu = \nu \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases}$$

黎曼空间的另一个定理，与广义相对论的等效原理密切相关：**对黎曼空间任意点 P 的邻域，总能找到一个局域参考**

系在忽略二阶小量之后使其度规为常数。这个定理意味着在数学上黎曼空间的任意点邻域都可以在一阶近似为局部平直的空间，正像曲线在一点附近可以近似为切线一样。证明[①]指出，必然能找到的这个局域参考系的原点相对 P 点瞬时静止，在空间自由下落。这正是广义相对论中 P 处的一个瞬时静止局域惯性参考系(简称局静惯系)。这个定理是等效原理的数学基础。此定理的证明中有条件：空间挠度为零。挠度概念可以从空间曲线了解。平面曲线没有挠度，所处平面称为其密切面。对非平面的空间曲线具有挠度。空间曲线的挠度是这样定义的：过空间曲线上的每一点都可以做一个曲线的密切面，只是这个密切面不可能包容整个曲线。当沿曲线从一点运动到另一点时通过该点的密切面也随之转动，转角对线位移的变化率就相应于曲线的挠度。一条平面曲线的内在性质可以用它的曲率表示，而空间曲线的内在性质除了其曲率之外还需要了解其挠度。空间也是如此，其内在性质也要由它的曲率和挠度表示，当然空间的挠度没有空间曲线挠度这样直观的几何意义。由此可知等效原理只有在无挠空间才正确，广义相对论讨论的是无挠空间。广义相对论的成功说明真实的时空是无挠的，或者说是挠度极小的。

黎曼在 1854 年将欧氏几何和非欧几何统一为黎曼几何，似乎特意为广义相对论准备好数学工具。黎曼本人也意识到这种几何的内在特点，1854 年他在就职演说中提到："我们的三维空间微分几何可由外部力决定"。半个世纪之后物理学家爱因斯坦正是在黎曼几何的基础上建立了广义相对论。正是黎曼空间而不是欧几里得空间是自然界的真空时空，它的几

---

① 刘辽．广义相对论．高等教育出版社(1987)．

何结构完全由引力决定，引力就是黎曼讲话中提到的所谓“外部力”。

3.2 史瓦西场中的固有时和真实长度

3.2.1 史瓦西场的固有时和真实长度

设有球对称分布的相对静止的物质球，球体外半径为 r_0。到球心的距离 $r>r_0$ 的区域的引力场就称为史瓦西(Karl Schwarzschild)场。史瓦西场是最重要的实际引力场，一般星体的场都可以看作史瓦西场。它的时空是弯曲的，和我们以前熟知的闵可夫斯基的平直时空不同。下面我们从引力对时钟、尺子的影响以及对时间、空间的测量着手讨论史瓦西场时空的性质。

需要说明的是，所说的“引力”、“引力场”还是沿用牛顿力学的概念，在爱因斯坦理论中引力几何化之后，已经没有“引力”的概念，而只是时空结构。例如牛顿引力为零的区域，在爱因斯坦理论中是平直时空，牛顿的地球引力场，在爱因斯坦理论中是弯曲时空的史瓦西场。为了与牛顿力学联系、对比，我们以后还要使用“引力”、“引力场”，都是指牛顿理论的概念。

首先看引力场中静止观测者所选用的钟和尺。物理上的时间基准和长度基准都是自然界实际存在的，时间基准为某周期事物的周期，长度基准为某波的波长。要求基准稳定、统一。所谓统一，就是把这些钟放在一起走时快慢应该相同，把这些尺放在一起做同样的测量，长度应该相同。这样的钟称为标准钟，这样的尺称为标准尺。狭义相对论中的钟和尺即标准钟和标准尺。把标准钟、尺放在引力场中各地点，就在全引力场建立了时间、长度标准。标准钟、尺一旦放入引力场，受引力影响快慢和长短发生变化，不再是“标准”的了，成为当地的固

有钟、尺。

引力场中静止观测者用当地钟测得的时间间隔称为固有时间隔，简称为固有时；用当地尺测得的二地点之间的距离称为真实长度(也称为纯空间距离或固有长度)。具有实际意义的物理测量中采用的都是固有时和真实长度。例如，引力场中有个飞行物，要得到它的飞行速度，就要测量它在固有时间隔中飞行的真实距离，真实距离对固有时的导数是它的飞行速度。我们现在尚不知引力对钟、尺的影响，但是标准钟与自然事物的时间历程必然以同样方式受引力影响(标准钟的基准也是某种自然事物的时间历程)，因此同一自然过程在引力场中任何地点用当地的标准钟计量，其结果都相同；类似地，标准尺和自然事物的真实长度也必然以同一方式受引力的影响，因此同一自然事物的真实长度在引力场中任何地点用当地标准尺测量其结果都相同。例如 He-Ne 激光器在引力场任何地方发光，当地观测者测到的激光频率都相同，波长也相同，看到的颜色都一样。

3.2.2 引力对标准钟和标准尺的影响

要了解引力对标准钟、尺的影响，必须用不受引力影响的时间、长度基准到引力场各地点比较当地的钟、尺。其中一种方法，是用引力场中自由下落的同一个局惯系的钟和尺，依次与引力场各处的钟、尺比较。同一个局惯系中的钟和尺不受引力影响，在下落过程中始终保持不变，正好作为引力场中统一的时间和长度基准。设球的质量为 M，外半径为 r_0，考虑 $r>r_0$ 的史瓦西场。以球心为原点，建立坐标系 $S(ct,r,\theta,\varphi)$，如图3.2.1。设 $S_0(ct,x_0,y_0,z_0)$ 为无穷远处从静止开始沿径向自由下落的局惯系，其中取 x_0 沿 r 方向。无穷远处引力趋于零，该区域近似为狭义相对论成立的惯性区域，各方向上尺相同。无

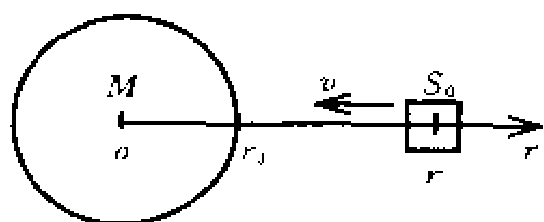


图 3.2.1

穷远处 S_0、S 两系相对静止，所以 S_0 系的标准钟、尺等于史瓦西场中无穷远处的钟、尺，S_0 系同一地点测的时间间隔 dt_0、长度 dl 就是无穷远处的固有时和真实长度。S_0 系就相当于带着无穷远处的钟、尺飞到引力场中校对各处的钟、尺。设 S_0 系原点到达 r 处时速率为 v。为了直接应用狭义相对论的两个惯性系之间的时空变换关系，在 S 系原点到达 r 处的瞬间在 r 处建立一个相对史瓦西场瞬时静止的局惯系 S'，简称为局静惯系，它是在该瞬时从 r 处开始下落的参考系。用 S_0 系两个时钟校准 S' 系一个钟的读数，S' 系该钟测的时间间隔为原时记为 $d\tau$，S_0 系测的是非原时 dt_0，则由狭义相对论关于原时和非原时的结论有

$$d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2}\,dt_0 \qquad (3.2.1)$$

用 S_0 系尺子同时量度 S' 系的长度 $d\sigma$，则 $d\sigma$ 为原长。若长度沿运动方向即径向，则由狭义相对论关于原长和非原长的结论

$$d\sigma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}dx_0 \qquad (3.2.2)$$

若长度垂直于运动方向（即横向），则 S_0 系与 S' 系测量结果相同。S' 系和史瓦西场 S 系 r 处瞬时静止，彼此间有相对加速度，不能直接应用狭义相对论的结论，对此在广义相对论中有爱因斯坦假设：**假定杆和时钟的性状都只同速度有关，同**

加速度无关[1]。此假设有大量实验验证，如1966年Farley等人以2%精度证实，当μ子在高能加速器中，以同样的速率分别沿直线（无加速度）和沿圆周（有很大的向心加速度）飞行时，其衰变率亦即寿命相同。由此假设，在同一地点彼此相对静止的观测者，无论他们彼此间是否有加速度，他们对当地的时间和长度的测量都相同，所以S'系中的原时$d\tau$和原长$d\sigma$即史瓦西场S中r处固有时和真实长度。因此，(3.2.1)式也表示分别在S系和S_0系中测量S系中r处发生的二事件的时间间隔$d\tau$（固有时）和dt_0之间的关系；(3.2.2)式表示分别在S系和S_0系测量S系中r处径向长度$d\sigma$（真实长度）和dx_0之间的关系；对横向长度S、S_0系的观测相同。若严格讨论前面所述爱因斯坦转盘问题，也应该利用爱因斯坦关于杆和时钟的假设。

由(3.2.1)式可知，引力场中测的固有时$d\tau$小于dt_0，也就是小于无穷远引力趋于零处固有时，说明引力场中时钟比无穷远处时钟走得慢。在引力场中不同地点的时钟哪个走得慢？S_0系从无限远处飞来，r越小S_0系的速率v越大，因此对同样的dt_0固有时$d\tau$越小，即r越小处时钟走得越慢。由牛顿力学知道，r越小引力越强，因此也可以说引力越强处时钟走得越慢，引力使时间流逝得缓慢。类似地，由(3.2.2)可知，引力场中测的径向真实长度$d\sigma$大于dx_0，也就是大于无穷远引力趋于零处的真实长度，说明引力场中径向尺相对无穷远处标准尺变短。r越小引力越强S_0系的速率v越大，对同样的dx_0真实长度$d\sigma$越长，径向尺变得越短。也就是说引力使长度变短。与狭义相对论中两个惯性系之间的时空变换中，运动

---

[1] 许良英等编译. 爱因斯坦文集(一). 商务印书馆 (1977).

时钟变慢、运动长度变短不同，这里引力引起的时空变化是实在的物理效应，如果双生子甲、乙生活在引力悬殊的两地，长时间以后再到一起，生活在强引力区的要年轻一些。在狭义相对论中若甲、乙生活在惯性系中，某一天乙匀速离开，甲乙两人都认为对方生活节奏慢，比自己年轻，但这是运动引起的测量效应，两人不可能再见面以确定到底谁年轻。如果乙做变速运动返回与甲重逢，乙必然比甲年轻，因为乙在变速过程中相当于处于引力场中，引力使他的生命节奏确实变慢了。这个问题我们还要在第 5 章详细讨论。一根棒平放地面上和竖直立起分别测量其长度，在当地测量结果相同；按无穷远处标准测量(或在 S_0 系中测量)，棒立起来后长度方向与引力方向相同，长度变短。对平直空间(无引力)，沿各方向的尺都相等，现在在引力场中沿引力方向的尺缩短了，横向的尺不变，空间显然是弯曲了。

必须了解，我们上面用飞来局域惯性系 S_0 系的时钟和尺子来校准引力场 S 系中的钟和尺，目的并不是要比较两个参考系的时钟谁快谁慢或者尺子谁长谁短，因为两个参考系之间有运动效应。我们的目的是借助 S_0 系的钟和尺来比较 S 系各点的钟和尺，这是完全可以做到的，因为 S 系中各点没有相对运动，也就没有运动效应，只有单纯的引力效应。

3.2.3 坐标钟和坐标尺·史瓦西场度规

前文中我们借助从无穷远处飞来的局惯系讨论了引力对时空的影响。但是 S 系一飞而过，用它讨论很不方便。为此在史瓦西场 S 系内各处建立起自己的统一的、不受引力影响的钟和尺，也就是把 S_0 系的钟和尺“留”在 S 系的各处。这样人为构造的钟和尺分别称为坐标钟和坐标尺。构建坐标钟、尺的一种可能方法如下：采用可调走时快慢的钟放在 S 系中某

处，当 S_0 系飞过时，用 S_0 系两钟分别与该钟对表，从而知道该钟读数与 S_0 系两时钟读数之比，按此调整该钟的走时快慢使它的读数与 S_0 系两时钟的读数相同。例如 S_0 系测两次对表的时间间隔为 10 ns(1 ns$=10^{-9}$ s)，该钟测为 5 ns，该钟读数与 S_0 系两钟读数之比为 1∶2，这样将该钟走时速率调快一倍，则该钟读数与 S_0 系两钟读数就相等了，于是调整后此钟即为该处的坐标钟。类似地，在 S 系各处放上可调长短的尺子，也用 S_0 系尺子校准它，测 S 系中同一长度，若按两把尺子测的结果不同，就相应调整 S 系中可调尺的长短，直到与 S_0 系测量结果相同，就成为该处的坐标尺。由此可知，坐标钟、坐标尺都是对号入座的，不能互换，也不标准，将它们放在一起，走时快慢或尺子长短各不相同，特别是尺子，还与所放的方位有关，同一处的坐标尺，安放的方位不同长短也不同。

在 S 系里静止观测者用坐标钟、坐标尺测量的时间间隔和距离，分别称为坐标时和坐标长度。坐标时用 $\mathrm{d}t$ 表示，径向坐标长度用 $\mathrm{d}r$ 表示，显然

$$\mathrm{d}t = \mathrm{d}t_0, \quad \mathrm{d}r = \mathrm{d}x_0 \tag{3.2.3}$$

为清楚起见，径向真实长度 $\mathrm{d}\sigma$ 用 $\mathrm{d}r'$ 表示，于是(3.2.1)和(3.2.2)式分别为

$$\mathrm{d}\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2}\,\mathrm{d}t \tag{3.2.4}$$

$$\mathrm{d}r' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\mathrm{d}r \tag{3.2.5}$$

横向真实长度等于坐标长度。

这样选取的坐标系又被称为史瓦西坐标系。

引入坐标钟、坐标尺，以及坐标时、坐标长度，还有两个重要收获。首先，在广义相对论中坐标的选择是相当随意的，除

了满足一定的物理条件(这样才是有物理意义的坐标系)和能够区分不同的时空点外，没有其他限制，也就是说它们的实际意义不明确。现在按(3.2.3)式定义之后，t、r 就有了明确的意义，可以称为坐标时、坐标距离。此外，时间概念的基础是同时性，置于各处的标准钟受引力影响走时快慢不同，不能用来作为史瓦西场统一的时间标准，也不能用它们的读数是否相同作为异地事件是否同时的判据。史瓦西场各处的坐标钟走时快慢相同，可以将它们调整同步，然后就可以判断两个异地事件是否同时。设两个异地事件 1、2 发生的坐标时分别记为 t_1、t_2，若 $t_1=t_2$，则两事件为同时事件，若 $t_1\neq t_2$，则两事件为不同时事件。于是在史瓦西场可以定义同时性，或者说在史瓦西场可以有时间概念，要知道有些引力场可能连时间概念也没有。

现在 r 具有坐标距离概念，可以讨论 r 与 v 的关系。这里用牛顿力学近似计算，时空看作平直的，r 当作 S 系中 r 处到原点的实际距离。在 S_0 系飞来过程中，S_0 系原点处质点 m 的机械能守恒，于是

$$\frac{1}{2}mv^2-G\frac{Mm}{r}=0$$

得到

$$v^2=\frac{2GM}{r} \tag{3.2.6}$$

在广义相对论中，时空是弯曲的，r 为坐标距离。凑巧的是，由广义相对论的能量守恒和史瓦西外部解得到的严格的 v^2 与 r 的关系，也正是(3.2.6)式。从这点可以看出，我们下面讨论的理论基础在本质上仍然是史瓦西解。

这样，史瓦西场中 r 处固有时 $\mathrm{d}\tau$，径向真实长度 $\mathrm{d}r'$ 与坐标时 $\mathrm{d}t$，坐标距离 $\mathrm{d}r$ 的关系为

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} dt \qquad (3.2.7)$$

$$dr' = \frac{1}{\sqrt{1 - 2GM/c^2 r}} dr \qquad (3.2.8)$$

垂直于引力方向(横向)的真实长度和坐标长度相同。

由(1.4.7)式在局静惯系 S' 中相邻两个时空点之间的间隔为

$$ds^2 = c^2 dt'^2 - (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2)$$

其中 t'、x'、y'、z' 为 S' 系的时间、空间坐标，其中 x' 沿径向。由爱因斯坦关于时钟的杆的假设，局静惯系 S' 系和史瓦西场 S 系对时间和空间的测量都相同，即 $dt' = d\tau, dx' = dr', dy' = dy, dz' = dz$。此时 $d\tau$ 为二事件的固有时间隔，由于二事件地点不同，不再是原时间隔。S' 系的时间对应 S 系的固有时，S' 系的长度对应 S 系的真实距离，则在 S 系

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - (dr'^2 + dy^2 + dz^2) \qquad (3.2.9)$$

在 S 系中采用球坐标 (r, θ, φ)，r 为坐标距离，固有时 $d\tau$ 与坐标时 dt 的关系为(3.2.7)式；径向真实距离 dr' 与坐标长度 dr 的关系为(3.2.8)式；横向真实距离平方 $dy^2 + dz^2$ 等于坐标长度平方 $r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$。所以用坐标时和坐标距离表示的史瓦西场中的线元为

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)dt^2 - \left[\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right] \qquad (3.2.10)$$

相应的史瓦西场的度规为

$$g_{\mu\nu}=\begin{bmatrix} 1-\dfrac{2GM}{c^2r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1-\dfrac{2GM}{c^2r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & & -r^2 & 0 \\ 0 & & & -r^2\sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{3.2.11}$$

其中不为零的度规为：

$$g_{00}=1-\frac{2GM}{c^2r}$$

$$g_{11}=-\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}$$

$$g_{22}=-r^2$$

$$g_{33}=-r^2\sin^2\theta$$

如果 S 系中没有引力，是平直空间，则表达式应为

$$ds^2=c^2dt^2-[dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)]$$

此式与(3.2.10)对比，有引力的空间 dt^2 前有系数 $\left(1-\dfrac{2GM}{c^2r}\right)$，表现出时间的弯曲；有引力的空间 dr^2 前有系数 $\left(1-\dfrac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}$，表现出空间弯曲。

在狭义相对论中曾经验证过，在两个惯性系之间进行时空变换(洛伦兹变换)时，ds^2 的表达式形式相同，或者说是洛伦兹变换下的不变量。在广义相对论中，坐标选取有相当大的随意性，但必须满足的一个基本要求是在坐标变换下 ds^2 的形式应保持不变，或者说 ds^2 是坐标变换下的不变量，这是广义相对论的最基本性质之一。站在广义相对论的高度回首狭义相对论，ds^2 的不变性是必然的，也就是说正是因为在洛伦

兹变换下可以保持 ds^2 的形式不变，洛伦兹变换才有可能在狭义相对论中成立。

实际上，时空的性质完全体现在它的线元形式上，或者说时空的性质完全由它的度规决定。所谓史瓦西外部解，就是计算出史瓦西场的线元，也就是(3.2.10)式或(3.1.11)式。(3.2.10)式或(3.1.11)式完全确定了史瓦西场的时空几何结构。下节讨论史瓦西场中时间的测量，以及用运动学方法分析运动与时间的关系，了解几个有关广义相对论的实验验证。

3.3 广义相对论的实验检验

自从广义相对论诞生以后，人们就想方设法做各种实验来检验它是否正确。由于弱场情况下广义相对论的效应非常小，很难观测，所以真正有价值的实验并不多，公认的经典检验有四个：光谱线的引力频移、水星近日点进动、光线在太阳引力场中偏折、雷达回波延迟。这些实验都是在史瓦西场中进行的，利用了史瓦西场的时空性质。

本节主要讨论光谱线的引力频移和 Cs 原子钟的环球飞行，对雷达回波的引力延迟仅做近似计算。

普通星体的引力场都非常弱。引力场的强弱由无量纲量 $\frac{2GM}{c^2r}$ 体现。下表列出一些星体的 $\frac{2GM}{c^2R}$ 值，其中 R 是星体的半径，$\frac{2GM}{c^2R}$ 是星体外部场中无量纲量 $\frac{2GM}{c^2r}$ 的最大值，也是星体外引力最强处的数值。可见除了中子星外一般星体的引力场都很弱。

表 3.3.1　一些星体的 $\frac{2GM}{c^2R}$ 值

星体	M(kg)	R(m)	$2GM/(c^2R)$
月球	7.35×10^{22}	1.74×10^{6}	10^{-10}
地球	5.98×10^{24}	6.38×10^{6}	10^{-9}
太阳	1.99×10^{30}	6.96×10^{8}	10^{-6}
白矮星	$\sim10^{30}$	$\sim10^{6}$	$\sim10^{-4}$
中子星	$\sim10^{30}$	$\sim10^{4}$	$\sim10^{-1}$

3.3.1　引力引起的光谱线频率移动

由(3.2.7)式可以定量讨论史瓦西场中引力对时间过程的影响。设史瓦西场中 A 处发生某自然过程,如生物的生长发育、光波振荡、微观粒子产生然后湮灭等等过程,这些过程本身固有的时间历程记为 $\Delta\tau_0$、这也正是 A 处静止观察者观测的固有时间隔,记为 $\Delta\tau_A$。如前所述用当地的时钟测量当地发生的事件的时间间隔,观测结果与 A 在何处、引力强弱无关。由(3.2.7)式,对应 $\Delta\tau_A$ 的坐标时间隔为

$$\Delta t=\left(1-\frac{2GM}{c^2r_A}\right)^{-1/2}\Delta\tau_A$$

由于 Δt 的长短在史瓦西场是一致的,所以在 B 处对应的固有时间隔为

$$\begin{aligned}\Delta\tau_B&=\left(1-\frac{2GM}{c^2r_B}\right)^{1/2}\Delta t\\&=\left(1-\frac{2GM}{c^2r_B}\right)^{1/2}\left(1-\frac{2GM}{c^2r_A}\right)^{-1/2}\Delta\tau_A\end{aligned}\qquad(3.3.1)$$

这就是 B 处静止观测者用该处时钟测量的 A 处发生的自然过程的时间间隔。

由于 $\Delta\tau_A=\Delta\tau_0$,并且在弱场条件下,$\frac{2GM}{c^2r}\ll1$ 。

在数学上，对无穷小量 x 在忽略二阶无穷小情况下，有近似关系式

$$(1+x)^{1/2}=1+\frac{1}{2}x \quad 以及 \quad (1+x)^{-1/2}=1-\frac{1}{2}x$$

更普遍的情况为（n 可以是任意实数）

$$(1+x)^n=1+nx \tag{3.3.2}$$

在这里 $x=\frac{2GM}{c^2r}$。于是有

$$\Delta\tau_B\approx\left(1-\frac{GM}{c^2r_B}\right)\left(1+\frac{GM}{c^2r_A}\right)\Delta\tau_0$$

$$\approx\left[1+\frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)\right]\Delta\tau_0 \tag{3.3.3}$$

其中最后一步，略去了高阶无限小$\frac{GMGM}{c^2r_Bc^2r_A}$。以后类似这样的近似计算经常要用到。

若 $r_A<r_B$，则 $\Delta\tau_B>\Delta\tau_0$，即在引力弱的地方（$B$ 处）的静止观察者“看到”的引力强的地方（A 处）发生的自然过程的时间比其固有的时间要长，也就是引力使时间流逝得慢。这只是理论上的探讨，广义相对论都是就地观测，不能异地观测。要证实上述讨论，即要观测引力对自然过程的影响，必须在 B 处就地观测，并把 A、B 处的观测联系起来。一个简单、直接的方法，就是利用光波的传播。设 A 处发出固有周期为 T_0、频率为 $\nu_0=1/T_0$ 的光传播到 B 处。则按(3.3.3)式计算 B 处测量的周期和频率分别为

$$T_B\approx\left[1+\frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)\right]T_0 \tag{3.3.4}$$

$$\nu_B\approx\left[1-\frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)\right]\nu_0 \tag{3.3.5}$$

这样，光波传到 B 处后，B 处测得的光波频率不等于其

固有频率，即引力引起光谱线的频率移动，简称引力频移，所以光谱线的引力频移是可观测到的引力对时间过程影响的重要检验。为清楚起见，下面再按光波的实际发射、接收过程来讨论引力频移。设史瓦西场中 A 处静止原子发光，固有频率为 ν_0，固有周期为 T_0。在 t_1、t_2 两时刻分别发出位相差为 2π 的两个波前，坐标时间隔为 $T=t_2-t_1$，对应的固有时间隔为 T_A 也就是 T_0。光波传到 B 处，B 处于 t_1'、t_2' 时刻依次收到上述两波前，坐标时间隔为 $T'=t_2'-t_1'$，对应的 B 处固有时间隔即 B 处观测的光波周期为 T_B，由(3.2.7)式得：

$$\begin{cases} T_A = \left(1 - \dfrac{2GM}{c^2 r_A}\right)^{1/2} T \\ T_B = \left(1 - \dfrac{2GM}{c^2 r_B}\right)^{1/2} T' \end{cases}$$

用 δt_1、δt_2 分别表示两波前的传播时间，则有

$$\left.\begin{aligned} t_1' &= t_1 + \delta t_1 \\ t_2' &= t_2 + \delta t_2 \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.6)$$

A、B 两点都是引力场中固定地点，引力场本身也不改变，所以两次传播时间相同，即 $\delta t_1=\delta t_2$，所以 $T=T'$。这个结果说明，光波在史瓦西场传播过程中坐标钟测的坐标时周期并不改变，于是

$$T_B = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_B}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_A}\right)^{-1/2} T_0$$

所以 B 处测的光波频率为

$$\begin{aligned} \nu_B &= \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_A}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_B}\right)^{-1/2} \nu_0 \\ &\approx \left[1 - \frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)\right]\nu_0 \end{aligned}$$

其中近似条件为弱场$\frac{GM}{c^2r}\ll 1$。此结果即(3.3.5)式。

定义相对频移为

$$Z=\frac{\nu-\nu_0}{\nu_0} \tag{3.3.7}$$

则上述光从 A 传到 B 时引力引起的光谱线的相对频移为(此处 $\nu=\nu_B$)

$$Z\approx-\frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)=\frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right) \tag{3.3.8}$$

考虑在地球上观测太阳光谱线由于太阳引力场产生的引力频移，取 $M=M_{\odot}=1.98\times10^{30}$ kg，$r_A=R_{\odot}=6.95\times10^{8}$ m，$r_B\to\infty$；其中脚标符号⊙表示太阳参量。由(3.3.8)式得相对引力频移为

$$Z\approx-\frac{GM_{\odot}}{c^2R_{\odot}}=-2.12\times10^{-6} \tag{3.3.9}$$

$Z<0$ 时 $\nu<\nu_0$，表示红移。

太阳大气有剧烈运动，主要是径向的。太阳大气运动引起的多普勒效应产生的光谱线频移大大超过引力频移，这是观测太阳光谱线引力频移的最大困难所在。为此采用各种方法减少干扰，例如测太阳边缘处光谱线，光线与太阳径向接近垂直，可以大大减少多普勒效应的影响。去掉干扰后实测结果与理论相符，如 J. E. Blamont[①] 等人在 1961 年测得 $Z=-(1.05\pm0.05)\times(2.12\times10^{-6})$。

---

① J. E. Blamont, and F. Roddier, Precise observation of the profile of the fraunhofer strontium resonance line. Evidence for the gravitational red shift of the Sun *Phys. Rev. Letters*, **7**, 437 (1961).

1959 年庞德[①](R. V. Pound)等人首次在地面上测出地球引力场产生的引力频移。实验在哈佛大学进行，放射线同位素^{57}Fe 在塔顶发射 γ 射线(作为点 A)，在塔底接收(作为点 B)，塔的高度 H 即发射、接收的高度差，引起引力频移。取 $r_A - r_B = H = 22.6$ m，$r_B \approx R_{\oplus} = 6.378\times10^6$ m，$M = M_{\oplus} = 5.976\times10^{24}$ kg 代入(3.3.8)式得

$$Z \approx \frac{GM_{\oplus}}{c^2R_{\oplus}^2}H = \frac{gH}{c^2} = 2.46\times10^{-15} \tag{3.3.10}$$

其中脚标⊕表示地球参数，$g = GM_{\oplus}/R_{\oplus}^2$ 为地球表面重力加速度。$Z>0$，即 $\nu>\nu_0$，实际上是向频率高的方向移动，称为紫移。Z 如此之小，观测非常困难，原子发光时的反冲引起的频移都超过引力频移，庞德等人利用穆斯堡尔效应作为测量非常小频移的方法测出引力频移为 $Z=(2.57\pm0.26)\times10^{-15}$，与理论值相当符合。1964 年庞德的进一步的实验与理论的符合度又改进到 1%。

3.3.2 史瓦西场中运动标准钟的走时速率——Cs 原子钟环球飞行实验

除了四项最著名的经典广义相对论检验之外，还有一些其他的实验检验，其中之一是 1971 年进行的 Cs 原子钟环球飞行的实验，这项实验是将 Cs(铯)原子钟放在飞机上，环球飞行一周后回到地面上与留在地面上的 Cs 原子钟比较时间差，实现真正的二次对表，确定地面上和飞机上哪个时钟走得快。这个实验综合了时钟的引力效应与运动效应，涉及运动与

---

① Pound, R. V., and G. A. Rebka, Apparent weight of photons *Phys. Rev. Letters*, 4, 337 (1960).

时间的关系。

考虑地球引力场，建立地心坐标系 $S(ct,r,\theta,\varphi)$。地球以角速度 ω 自西向东匀角速转动。由于地球的自转，地球的场相对于严格的史瓦西场（静止不动的球体形成的静场）有所不同。但以后在讨论行星近日点进动时可知，地球自转的影响是高阶微扰可以忽略，因此仍采用史瓦西场的关系式。

下面先普遍地讨论相对史瓦西场运动的物体的时钟与史瓦西场中同一点的固有时之间的关系。设 $P(r,\theta,\varphi)$ 为 S 系中固定点，某时刻物体经过 P 点，相对 P 点的固有速度为 $v=\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\tau}$，其中 $\mathrm{d}\tau$ 为 S 系中 P 处测量的物体运动的固有时间隔，$\mathrm{d}\sigma$ 为 $\mathrm{d}\tau$ 内物体运动的真实距离。由时钟走时快慢与加速度无关的假设，物体上观测者测得的固有时间间隔 $\mathrm{d}\tau'$ 与 S 系观测者测得的固有时间隔 $\mathrm{d}\tau$ 的关系只取决于相对速率 v。从 S 系看运动的时钟变慢，即

$$\mathrm{d}\tau' = (1 - v^2/c^2)^{1/2}\mathrm{d}\tau$$

将(3.2.7)式表示的固有时与坐标时的关系代入上式得

$$\mathrm{d}\tau' = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{1/2}\mathrm{d}t \qquad (3.3.11)$$

对弱场 $\left(\dfrac{2GM}{c^2r}\ll 1\right)$ 低速 $\left(\dfrac{v^2}{c^2}\ll 1\right)$ 下取一阶近似有

$$\mathrm{d}\tau' \approx \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} - \frac{GM}{c^2 r}\right)\mathrm{d}t \qquad (3.3.12)$$

这两式就是运动的物体上的原时（固有时）间隔 $\mathrm{d}\tau'$ 与 S 系中坐标时间隔 $\mathrm{d}t$ 的关系式，式中的 r 即物体在该时刻的坐标距离。

用(3.3.12)式就可以计算 Cs 原子钟环球飞行问题。先计算一种简化情况：飞机在赤道上与地面钟对表后升空，高度

为 h，沿赤道相对地面以不变的速率 u 环球飞行一周（若飞机自西向东飞行时取 u 为正，若自东向西飞行时取 u 为负。），然后降落，再次与原来的地面钟对表，看飞机上时钟与地面上时钟的时间差。飞机的起飞、降落时间忽略不计，则飞机飞行一圈所需坐标时为

$$\Delta t \approx \frac{2\pi R}{|u|}$$

其中 R 是地球赤道半径。运动和引力对长度的影响造成的相对论效应都可以忽略不计。

赤道地面上的时钟相对 S 系以 $v_1=\omega R$ 运动，其坐标距离恒为 R，则由(3.3.12)式，相应的地面上时钟的计时为

$$\Delta\tau_{地}' \approx \left(1-\frac{\omega^2R^2}{2c^2}-\frac{GM}{c^2R}\right)\Delta t$$

飞机上时钟相对 S 系以 $v_2=\omega R+u$ 运动，除起飞、降落外坐标距离恒为 $(R+h)$。不计起飞、降落时间，则相应的飞机上时钟计时为

$$\Delta\tau_{飞}' \approx \left[1-\frac{(\omega R+u)^2}{2c^2}-\frac{GM}{c^2(R+h)}\right]\Delta t$$

所以飞机上与地面上标准钟走时的时间差为

$$\begin{aligned} d\tau' &= \Delta\tau_{飞}'-\Delta\tau_{地}' \\ &= \frac{\Delta t}{c^2}\left[-u\left(\omega R+\frac{u}{2}\right)+G\frac{Mh}{R(R+h)}\right] \end{aligned}$$

取 $R=R_\oplus$，$M=M_\oplus$，因为 $h\ll R_\oplus$，且重力加速度 $g=GM_\oplus/R_\oplus{}^2$，所以

$$d\tau' \approx \frac{2\pi R_\oplus}{c^2|u|}\left[gh-u\left(\omega R_\oplus+\frac{u}{2}\right)\right] \qquad (3.3.13)$$

其中括号内第一项为引力效应，是飞机上引力比地面上弱引起的；第二项为运动效应，是飞机与地面相对 S 系运动速率

不同引起的。

设 $u=500\ \mathrm{m/s}$、$h=2.00\times10^{4}\ \mathrm{m}$，$g=9.80\ \mathrm{m/s^2}$，则计算结果为：引力效应为 175 ns（与运动方向无关）；向东飞行运动效应为 −318 ns，总时差为 −143 ns；向西飞行运动效应为 96 ns，总时差为 271 ns。从中可以看出，上述条件下引力效应与运动效应是同量级的，必须综合考虑两种效应才可以正确讨论 Cs 原子钟环球飞行实验。

1971 年美国华盛顿大学 Hafele 和 Keating 将 4 只 Cs 原子钟放在客机上分别向东和向西飞行一周①。实验取 4 只钟的平均值，计算原理同上，但由于飞行过程中飞机的高度、方向、速度有变化，所以还要考虑飞行参数改变的影响，特别是飞行方向的影响。实际计算是按航行图分别若干时间区段（向东飞行飞成 125 段，向西飞行分成 108 段）计算，结果如表 3.3.2所列。可见理论计算与实验结果是相符的。

表 3.3.2 Cs 原子钟环球飞行实验

	理论计算 (ns)			实验结果 (ns)
	引力效应	运动效应	总时差（计算）	
向东	144±14	−188±18	−40±23	−59±10
向西	179±18	96±10	275±21	273±7

3.3.3 雷达回波引力延迟的简化计算

从地球向某行星发射雷达讯号后接收其反射波，用地球钟测量电磁波（亦即光子）的往返时间。若雷达波远离太阳，可

---

① Hafele, J. C., and R. E. Keating, Around-the-world atomic clocks: Predicted relativistic time gains. *Science*, **177**, 166 (1972), and Around the world atomic clocks: Observed relativistic time gain. *Science*. **177**, 168 (1972).

以认为是在平直的闵可夫斯基空间内直线传播。若雷达波经过太阳附近，太阳引力场使时间膨胀、空间弯曲，造成雷达回波时间比无太阳引力时要长一些，称之为雷达回波的引力延迟。仔细分析，雷达回波的延迟原因有两个：

(1)如前所述，引力场中静止观测者对长度(真实长度)和时间(固有时间)的测量与当时当地的局静惯系中观测者的结果相同，局静惯系测的光速恒为c(狭义相对论的光速不变原理)，因此引力场中静止观测者测到的光速也是c。设该观测者测得光子在固有时$\mathrm{d}\tau$内运动$\mathrm{d}\sigma$距离，则$\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\tau=c$，称之为固有光速(因为采用固有时)，因此固有光速总是c。但在引力场中统一的时间标准是坐标时，地球上观测者测的固有时近似为太阳引力场的坐标时(地球相对太阳很远，太阳引力很弱近似为零，于是在地球附近太阳引力场的$g_{00}\approx1$，故地球处$\mathrm{d}\tau\approx\mathrm{d}t$)，因此实际计算中以及地球观测者观测到的都是太阳引力场的坐标时，取时间间隔为坐标时得到的光速称为坐标光速

$$\begin{aligned}c_{坐}&=\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\\&=\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)^{1/2}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\tau}\\&=\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)^{1/2}c\end{aligned}\qquad(3.3.14)$$

显然引力场中坐标光速变慢，要造成光线传播时间延长。

(2)从地球(相当于距太阳无穷远)观测者看来，太阳出现使三维空间弯曲，光子走的路程比起没有太阳时走的直线路程来要长一些，也造成光线传播时间延长。

计算雷达波传播时间，要用路程除以光速。没有太阳时，近似为闵可夫斯基平直空间，地球向行星发射的信号及回波

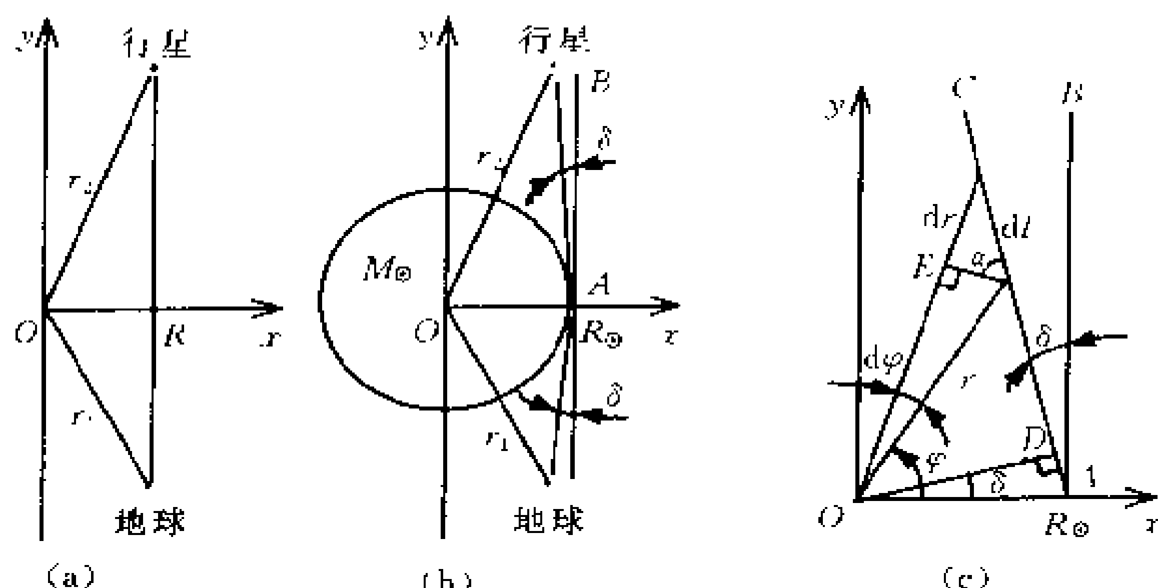


图 3.3.1

近似为直线(见图 3.3.1(a)),光速为 c,取 r_1、r_2分别为日地、日与行星的距离。这里为了便于比较,O 点取为将来太阳到来时的太阳中心位置,$R=R_\odot$。于是在地球测量雷达回波所需时间

$$\Delta\tau = \Delta t = \frac{2}{c}\left(\sqrt{r_1^2 - R^2} + \sqrt{r_2^2 - R^2}\right) \quad (3.3.15)$$

当太阳中心到达 O 点时,往返的雷达波掠过太阳表面。严格的计算方法是先由动力学方程求出光子的实际轨道,然后按此轨迹计算出雷达回波所需时间。这里近似光线(雷达波)为与 y 轴成 δ 角度的直线(见图 3.3.1(b)),δ 等于光线在太阳引力场中的单向偏折角,从 4.3 节可以知道,按广义相对论的计算

$$\delta = \frac{2GM_\odot}{c^2R_\odot} = 0.875''$$

这样无需动力学理论,就可以由运动学关系计算出雷达回波所需时间,相当于史瓦西场中运动学计算的例题。

在前文3.2节讨论史瓦西场线元时我们讨论了球坐标系中径向和横向真实距离，由此可以得到史瓦西场中的真实距离为

$$d\sigma = \left[\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right]^{1/2}$$

(3.3.16)

为简便起见，取 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 的 xy 平面，$d\theta = 0$，则有

$$d\sigma = \left[\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2\right]^{1/2} \quad (3.3.17)$$

对弱场 $\frac{GM}{c^2 r} \ll 1$，利用近似公式(3.3.2)式得：

$$\begin{aligned} d\sigma &\approx \left[\left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) dr^2 + r^2 d\varphi^2\right]^{1/2} \\ &= \left(dr^2 + r^2 d\varphi^2 + \frac{2GM}{c^2 r} dr^2\right)^{1/2} \\ &= \left(dl^2 + \frac{2GM}{c^2 r} dr^2\right)^{1/2} \\ &= dl\left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\frac{dr^2}{dl^2}\right)^{1/2} \\ &\approx \left(1 + \frac{GM}{c^2 r}\frac{dr^2}{dl^2}\right) dl \end{aligned}$$

其中 $dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$。上面第二次近似时 $\frac{2GM}{c^2 r}\frac{dr^2}{dl^2}$ 即为近似公式(3.3.2)中的无限小量 x。以后经常做这样的近似处理，不再一一说明。

在平直空间中相邻两点间距离平方为(球坐标)：$dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$，取 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 的 x-y 平面，即为 dl^2。dl 实际上是平直空间相邻两点间的距离。再由(3.3.14)式得：

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}\sigma}{c}\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1/2}\approx\frac{\mathrm{d}\sigma}{c}\left(1+\frac{GM}{c^2r}\right)$$

$$\approx\frac{\mathrm{d}l}{c}\left(1+\frac{GM}{c^2r}\right)\left(1+\frac{GM}{c^2r}\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}l^2}\right)$$

略去高阶无穷小得

$$\mathrm{d}t\approx\frac{\mathrm{d}l}{c}\left[1+\frac{GM}{c^2r}\left(1+\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}l^2}\right)\right] \tag{3.3.18}$$

从图 3.3.1(b)看到，雷达波经历从地球到 A 点到行星再返回 A 点最后回到地球的过程，为此先讨论从 A 到行星(或地球)的普遍过程，见图 3.3.1(c)，其中坐标长度积分变量取为 r，最后 O 点到 C 点的距离也取为 r，即 $OC=r$。BA 垂直于 x 轴，代表没有太阳引力时的光线(雷达波传播的方向线)。则由(3.3.18)式，光从 A 传到 C 的坐标时间隔为

$$\Delta t=\int_{r=R}^{r}\frac{\mathrm{d}l}{c}\left[1+\frac{GM}{c^2r}\left(1+\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}l^2}\right)\right]$$

$$=\frac{\Delta l}{c}+\frac{GM}{c^3}\int_{r=R}^{r}\left(1+\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}l^2}\right)\frac{\mathrm{d}l}{r}$$

其中 $\Delta l=AC=AD+DC=R\sin\delta+(r^2-R^2\cos^2\delta)^{1/2}\approx R\delta+(r^2-R^2)^{1/2}$，近似的条件为 $\delta\ll1$。第二项积分相对第一项为小量，且由于 $\delta\ll1$ 有近似 $\alpha=\varphi-\delta\approx\varphi$，所以：

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}l}=\sin\alpha\approx\sin\varphi,\quad \mathrm{d}l=\frac{r\mathrm{d}\varphi}{\cos\alpha}\approx\frac{r\mathrm{d}\varphi}{\cos\varphi}$$

于是

$$\frac{GM}{c^3}\int_{r=R}^{r}\left(1+\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}l^2}\right)\frac{\mathrm{d}l}{r}$$

$$\approx\frac{GM}{c^3}\int_{0}^{\varphi}(1+\sin^2\varphi)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos\varphi}$$

$$=2\frac{GM}{c^3}\left[\ln\frac{r+\sqrt{r^2-R^2}}{R}-\frac{\sqrt{r^2-R^2}}{2r}\right]$$

$$\approx 2\frac{GM}{c^3}\left(\ln\frac{2r}{R}-\frac{1}{2}\right)$$

上式最后一步的近似是由于太阳半径远远小于太阳到行星的距离，即 $R \ll r$。

这样，在 $\delta \ll 1$ 和 $R \ll r$ 的情况下，有

$$\Delta t \approx \frac{1}{c}\left[\sqrt{r^2-R^2}+R\delta+2\frac{GM}{c^2}\left(\ln\frac{2r}{R}-\frac{1}{2}\right)\right] \tag{3.3.19}$$

设日地、日与行星的距离分别为 r_1、r_2。将 r_1、r_2 分别代入(3.3.19)式得

$$\Delta t_{A\to地球} \approx \frac{1}{c}\left[\sqrt{r_1^2-R^2}+R\delta+2\frac{GM}{c^2}\left(\ln\frac{2r_1}{R}-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$\Delta t_{A\to行星} \approx \frac{1}{c}\left[\sqrt{r_2^2-R^2}+R\delta+2\frac{GM}{c^2}\left(\ln\frac{2r_2}{R}-\frac{1}{2}\right)\right]$$

于是雷达波往返地球到行星所需的总的坐标时间隔：

$$\begin{aligned}\Delta t_{总} &= 2(\Delta t_{A\to地球}+\Delta t_{A\to行星}) \\ &\approx \frac{2}{c}\Big[\sqrt{r_1^2-R^2}+\sqrt{r_2^2-R^2}+2R\delta+ \\ &\quad 2\frac{GM}{c^2}\left(\ln\frac{4r_1r_2}{R^2}-1\right)\Big]\end{aligned} \tag{3.3.20}$$

在地球上固有时近似等于太阳引力场的坐标时，所以有太阳引力场时地球上测的雷达回波固有时间隔 $\Delta\tau' \approx \Delta t_{总}$，与(3.3.15)式比较，太阳引力引起的雷达回波的延迟为：

$$\begin{aligned}d\tau &= \Delta\tau'-\Delta\tau \\ &\approx \frac{4}{c}\left[R\delta-\frac{GM}{c^2}\left(\ln\frac{4r_1r_2}{R^2}-1\right)\right]\end{aligned} \tag{3.3.21}$$

取 $M=M_\odot$，$R=R_\odot$，并将 $\delta=2GM_\odot/(c^2R_\odot)$ 代入，得：

$$d\tau \approx 4\frac{GM_\odot}{c^3}\left(\ln\frac{4r_1r_2}{R_\odot^2}+1\right) \tag{3.3.22}$$

日地距离 $r_1 = 1.50\times10^{11}$ m，日到金星 $r_2 = 0.723r_1$，日到水星 $r_2 = 0.387r_1$。代入(3.3.22)式得：

到金星 $d\tau \approx 2.52\times10^{-4}$s；

到水星 $d\tau \approx 2.40\times10^{-4}$s。

夏皮罗(I. I. Shapiro)首先提议用雷达回波延迟来检验广义相对论，并从 1967 年起对金星、水星的雷达回波延迟进行了长期观测，实验与理论计算符合[①]：

$$d\tau_{实验} = d\tau_{理论} \times (1.02 \pm 0.05)$$

像其他广义相对论的实验检验一样，关于雷达回波延迟的实验观测也很困难，原因也在于广义相对论的效应太小了，$d\tau$ 的量级为 10^{-4}s，因此行星上几千米的高度起伏 Δh 引起的回波时间之差 $\Delta h/c$ 的量级也达到 10^{-4}s。所以这样的观测历时数年，并采取了许多提高精度的方法。1970 年 J. D. Anderson 等人[②]对水手 6、7 号人造卫星做雷达回波实验，实验精度进一步提高，与理论计算更加符合：

$$d\tau_{实验} = d\tau_{理论} \times (1.00 \pm 0.04)$$

3.4 广义相对论中的普遍时空

一般的引力场时空(即广义相对论中的普遍时空)要比史瓦西场时空复杂得多。下面讨论一个普遍的引力场。首先建立有物理意义的坐标系 $S(x_0, x_1, x_2, x_3)$，其中 $x_0 = ct$。引力场度规为 $g_{\mu\nu}$。在广义相对论中可以建立任意坐标系，但只有满

---

① Shapiro, I. I. et al., Fourth test of general relativity: New radar result. *Phys. Rev. Lett.*, **26**, 1132 (1971).

② Anderson, J. D. et al., Experimental test of general relativity using time-delay data from Mariner 6 and Mariner 7. *Astrophys. J.*, **200**, 221 (1975).

足一定条件的坐标系才有物理意义，我们下面只涉及具有物理意义的坐标系，对一般的引力场的时空做简单的介绍。

3.4.1 引力场中同一地点固有时与坐标时普遍关系

对引力场中固定点 P，$dx_1=0$，$dx_2=0$，$dx_3=0$，则

$$ds^2=g_{00}c^2dt^2$$

设此刻在 P 处建立局静惯系 S'。由于 ds^2 为坐标变换下的不变量，在 S' 系内时空间隔也是 ds^2。注意到 S' 系是惯性系，并且 $dx=dy=dz=0$（S、S' 系相对静止），因此时间间隔 $d\tau'$ 为原时，所以有

$$ds^2=c^2d\tau'^2$$

因此得到：$d\tau'=\sqrt{g_{00}}dt$。而 S' 系与引力场 S 系相对静止，两个坐标系的时间相同，即 $d\tau'$ 等于 S 系中 P 处的固有时 $d\tau$，所以引力场中同一点处固有时与坐标时关系为

$$d\tau=\sqrt{g_{00}}dt \tag{3.4.1}$$

史瓦西场中 $g_{00}=1-\dfrac{2GM}{c^2r}$，按此式得到的关系式正是(3.2.7)式。

3.4.2 引力场中的时间

爱因斯坦指出，时间的概念建立在同时性的基础上。

狭义相对论中同一惯性系内可以直接判断某些事件的同时性。如 A、B 两点与 C 距离相等，则 C 发光后 A、B 接收光的两事件必为同时事件。利用同时事件可以对表，例如在 A、B 收到光信号时刻调整 A、B 处的时钟读数相同，就将 A、B 处的时钟对表了。同一惯性系中静止时钟的走时速率相同，A、B 两处时钟对表后，就可以永远保持同步。这样，利用同时事件可以将整个惯性系中时钟调整同步。此后无论事件发生

在何处，都可以由当地时钟记录的事件发生时刻判断它们是否同时，如果是不同时事件可以判断它们发生的前后顺序。

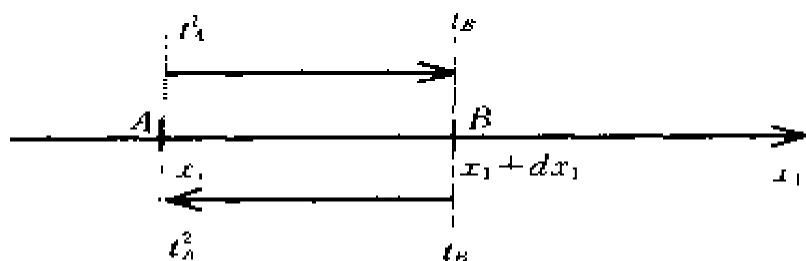


图 3.4.1

在广义相对论中首先也要定义同时性。由于各地时钟走时不同，所以同时性是对坐标时定义的。设 A、B 为紧邻两点，空间坐标差为 $\mathrm{d}x_1$、$\mathrm{d}x_2$、$\mathrm{d}x_3$。A 处 t_A^1 时刻发光，B 处 t_B 时刻收到并反射光信号记为 B 事件，A 处 t_A^2 时刻收到反射的光信号，见图 3.4.1(其中取 $\mathrm{d}x_2=0$，$\mathrm{d}x_3=0$)。

令

$$t_A = \frac{1}{2}(t_A^1 + t_A^2) \tag{3.4.2}$$

代表 A 事件发生的坐标时。

定义 A、B 为同时发生的两事件。

设 A、B 处坐标钟已调整同步，光从 A 到 B 及从 B 到 A 各用时 $\mathrm{d}t_1$ 和 $\mathrm{d}t_2$，则

$$t_B = t_A^1 + \mathrm{d}t_1, \quad t_A^2 = t_B + \mathrm{d}t_2$$

将 t_A^1 和 t_A^2 代入(3.4.2)式得

$$t_A = t_B + \frac{1}{2}(\mathrm{d}t_2 - \mathrm{d}t_1) \tag{3.4.3}$$

如果是在惯性系中，则有 $\mathrm{d}t_2=\mathrm{d}t_1$，于是由(3.4.3)式 $t_A=t_B$，那么按(3.4.2)式定义的 A 事件与 B 事件在惯性系中也判断是同时的事件，可见广义相对论的同时性的普遍定义与

狭义相对论的同时性概念相符。但在普遍的引力场中可能出现 $dt_2 \neq dt_1$ 的情况，于是 $t_A \neq t_B$，即在一般情况下在普遍的引力场中同时事件的坐标时不一定相同。

光子沿零世界线 $ds^2=0$ 运动，由此可计算 dt_1、dt_2。为简单起见，令 $dx_2=0$，$dx_3=0$，如图 3.4.1 所示，则(3.1.4)式表示的四维时空的线元平方只剩下 4 项：

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= g_{00}c^2dt^2 + g_{01}cdtdx_1 + g_{10}dx_1cdt + g_{11}dx_1^2 \\
&= g_{00}c^2dt^2 + 2g_{01}cdtdx_1 + g_{11}dx_1^2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

其中取 $dx_0=cdt$，并且度规 $g_{\mu\nu}$ 是对称的，$g_{01}=g_{10}$。

解此一元二次方程得

$$
dt = \frac{1}{cg_{00}}\left[-g_{01}dx_1 + \sqrt{(g_{01}^2 - g_{00}g_{11})dx_1^2}\right] \tag{3.4.4}
$$

其中为使 $dt>0$ 舍去了根号前的负号。(3.4.4)式对光从 A 到 B 过程和光从 B 到 A 过程都适用。对光从 A 到 B 过程在上式中代入 dx_1 得到 dt_1，即

$$
dt_1 = \frac{1}{cg_{00}}\left[-g_{01}dx_1 + \sqrt{(g_{01}^2 - g_{00}g_{11})dx_1^2}\right]
$$

对光从 B 回到 A 的过程在上式中代入 $-dx_1$ 得到 dt_2，即

$$
dt_2 = \frac{1}{cg_{00}}\left[g_{01}dx_1 + \sqrt{(g_{01}^2 - g_{00}g_{11})dx_1^2}\right]
$$

得 $\frac{1}{2}(dt_2-dt_1)=\frac{g_{01}}{cg_{00}}dx_1$。于是在 $dx_2=0$，$dx_3=0$ 的简单情况下两个紧邻点 A、B 的坐标时关系为

$$
t_A = t_B + \frac{g_{01}}{cg_{00}}dx_1 \tag{3.4.5}
$$

对一般情况，$dx_2\neq0$，$dx_3\neq0$，用类似方法得到普遍关系

$$t_A = t_B + \sum_i \frac{g_{0i}}{cg_{00}} \mathrm{d}x_i \qquad (3.4.6)$$

若 $g_{0i} \neq 0$ 则 $t_A \neq t_B$，即紧邻点发生的同时事件坐标时并不相同。若 A、B 两地坐标钟并未调整同步，可按(3.4.6)式由已知的 $g_{\mu\nu}$、$\mathrm{d}x_i$ 计算 t_A、t_B 的差值，将坐标钟按此差值调整好即可同步。由此可见，要调整引力场中坐标钟同步，除知道两钟位置外还要知道引力场的性质——度规。

对非紧邻点的坐标钟，可以选某条路径，在路径上按紧邻点时钟对表法逐点对表而达到同步，但这只有在对表结果与路径无关的情况下才有意义。否则，如果对表结果与路径有关，例如从 A 出发，经不同路径对表到达 B 处后 B 表的读数各不相同，这样对表就毫无意义了。沿某一路径 L 对表就是沿该路径做如下积分

$$\int_L \sum_i \frac{g_{0i}}{cg_{00}} \mathrm{d}x_i$$

因此要求对表结果与路径无关就是要求上述积分与路径无关。这个条件等价于闭合回路上积分为零

$$\oint \sum_i \frac{g_{0i}}{cg_{00}} \mathrm{d}x_i = 0 \qquad (3.4.7)$$

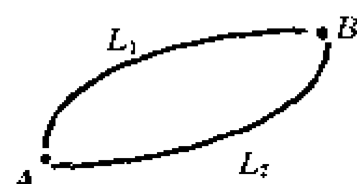


图 3.4.2

等价的理由如下。如图 3.4.2 所示，设从 A 到 B 有任意两条路径 L_1、L_2，则

$$\oint \sum_i \frac{g_{0i}}{cg_{00}} \mathrm{d}x_i = \int_{A(L_1)}^{B} \sum_i \frac{g_{0i}}{cg_{00}} \mathrm{d}x_i + \int_{B(L_2)}^{A} \sum_i \frac{g_{0i}}{cg_{00}} \mathrm{d}x_i$$

这样若 $\oint \sum_i \frac{g_{0i}}{cg_{00}} \mathrm{d}x_i = 0$，就有积分与路程无关：

$$\int_{A(L_1)}^{B} \sum_i \frac{g_{0i}}{cg_{00}} \mathrm{d}x_i = -\int_{B(L_2)}^{A} \sum_i \frac{g_{0i}}{cg_{00}} \mathrm{d}x_i$$

$$= \int_{A(L_2)}^{B} \sum_i \frac{g_{0i}}{cg_{00}} \mathrm{d}x_i$$

综上所述，在广义相对论中只有在(3.4.7)式条件下才有异地同时性，也才有时间的概念。若 $\oint \sum_i \frac{g_{0i}}{cg_{00}} \mathrm{d}x_i \neq 0$，则无法异地对表，没有异地同时性，也就没有时间的概念。

对史瓦西场这样的静场，总可以找到合适的坐标系使 $g_{0i}=0$，像我们前面选的史瓦西坐标系(ct, r, θ, φ)。这样静引力场总是可以满足(3.4.7)式，因此必有时间概念，而且由于 $g_{0i}=0$，代入(3.4.6)式有

$$t_A = t_B$$

即异地同时事件的坐标时相等。因此在3.2节对史瓦西场定义的同时性符合这里的普遍定义。这样在静引力场中我们可以像在狭义相对论一样简单地根据坐标时 t 判断不同地点发生的事件的时间顺序。

3.4.3 引力场中的真实距离

再次考虑上述 A、B 之间的对表过程。由于固有光速恒为 c，A 处观察者认为光从发射到返回被接收过程中通过2倍的 A、B 之间的真实距离 $\mathrm{d}\sigma$。由(3.4.1)式，在此期间光传播的固有时为（并将前面 $\mathrm{d}x_2=0$、$\mathrm{d}x_3=0$ 情况下的 $\mathrm{d}t_1$、$\mathrm{d}t_2$ 的结果代入）

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\tau &= \sqrt{g_{00}}(\mathrm{d}t_2 + \mathrm{d}t_1) \\ &= \frac{2}{c\sqrt{g_{00}}} \sqrt{(g_{01}^2 - g_{00}g_{11})\mathrm{d}x_1^2} \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

于是两个紧邻点 A、B 之间的真实距离为

$$d\sigma = \frac{1}{2}c d\tau = \sqrt{\left(\frac{g_{01}^2}{g_{00}} - g_{11}\right)dx_1^2} \qquad (3.4.9)$$

对 $dx_2 \neq 0$、$dx_3 \neq 0$ 的普遍情况，相应的关系式为

$$d\sigma^2 = \sum_{i,j}\left(\frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} - g_{ij}\right)dx_i dx_j \qquad (3.4.10)$$

求非紧邻点之间真实距离应对上式积分。若 $g_{0i} \neq 0$ 且 $g_{\mu\nu}$ 与 t 有关，则坐标时不能统一，积分毫无意义，无法定义有限的纯空间距离。若 $g_{0i} = 0$ 或者 $g_{\mu\nu}$ 与 t 无关，可积分上式得到非紧邻点之间的纯空间距离。

对史瓦西场，$g_{0i}=0$，$g_{11}=-\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}$，$g_{22}=-r^2$，$g_{33}=-r^2\sin^2\theta$，代入(3.4.10)式得到紧邻点之间的真实距离为

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= \sum_i(-g_{ii}dx_i^2) \\ &= \left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \end{aligned}$$

这就是(3.3.16)式。

第 4 章　史瓦西场中自由粒子的运动

史瓦西场的度规完全确定了场的几何性质。由引力几何化也就完全确定了场中自由粒子的运动。这一节讨论自由粒子在史瓦西场运动的相对论动力学方程和运动规律，与牛顿理论的结果相比较，计算可观测的相对论效应。太阳系中行星的运动以及光线的传播等等，是自由粒子在史瓦西场运动的实际例子。

广义相对论的自由粒子指引力场中除引力外不受其他力的质点和光子。由于爱因斯坦的广义相对论是没有引力的引力理论，所以按广义相对论的观点，自由粒子就是不受力的粒子。

经典力学中，解决质点运动的动力学问题有二条途径：直接从运动微分方程出发或者从系统机械能守恒、角动量守恒等守恒定律出发。与此类似，相对论中讨论自由粒子运动的动力学问题，也可以从粒子运动的微分方程——测地线方程——出发或者从能量、角动量守恒出发讨论。

4.1　史瓦西场中自由粒子的运动规律

4.1.1　测地线假设——自由粒子运动微分方程

1. 测地线假设

在 2.2.4 中提到过测地线假设，这里结合自由粒子的运动做简单的讨论。由于没有学习微分几何，所以只能做泛泛的

说明，不能详细解释。因此在阅读这一段时，读者只需了解概念就可以了。

在局惯系中狭义相对论成立，空间是平直的闵可夫斯基空间，不受力的自由粒子沿平直空间测地线——直线运动。由广义相对性原理，从局惯系变换到非惯系——引力场时，自由粒子将沿弯曲的黎曼空间测地线运动，这就是广义相对论的**测地线假设：自由粒子沿黎曼空间的测地线运动。**

因此我们以前的看法即牛顿力学中的说法"粒子在欧氏空间的引力场中运动"，现在按爱因斯坦观点，应代之以广义相对论的"黎曼空间里自由粒子的运动"。

测地线上的点的坐标满足测地线方程。测地线方程是关于坐标的二阶偏微分方程，方程的系数包含度规的微分，是微分几何的基本关系式之一。广义相对性原理使这个数学关系式具有了物理意义——自由粒子的运动微分方程。物质分布及其运动通过引力场方程决定了空间度规，度规通过测地线方程确定了测地线亦即自由粒子的运动。度规在测地线方程中起了类似引力势的作用。

平坦时空度规为常数，其微分为零。在三维平直纯空间中测地线可以简化为：

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=0$$

积分此方程得到测地线的参数表达式

$$x=a_1t+b_1,\quad y=a_2t+b_2,\quad z=a_3t+b_3$$

其中 a_1、a_2、a_3 以及 b_1、b_2、b_3 为常数。上述表达式表示的是欧氏空间的直线。在平直空间中的自由粒子沿测地线运动就是沿直线运动。

在弯曲的黎曼空间积分测地线方程，就可以得到自由粒

子在引力场中的运动规律。

2. 静态的弱引力场的低速近似

对静态的弱引力场，若粒子低速运动，则在 $g_{00}(r)$ 取小量的一阶近似下，测地线方程可以近似为牛顿的引力场方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=-\nabla\phi \tag{4.1.1}$$

其中 ϕ 是牛顿引力势，类似静电场的电势 U。在静电场中点电荷 q 受电场力为 $\boldsymbol{F}_{电}=q\boldsymbol{E}$，静电场场强 $\boldsymbol{E}$ 与静电势 U 的关系为 $\boldsymbol{E}=-\nabla U$，于是 $\boldsymbol{F}_{电}=-q\nabla U$。同样，在牛顿万有引力场中，质点 m_0 受的引力为 $\boldsymbol{F}_{引}=-m_0\nabla\phi$，所以(4.1.1)式实际上就是我们常见的万有引力场中质点的运动方程

$$m_0\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{F}_{引} \tag{4.1.2}$$

对弱引力场有近似关系式

$$g_{00}=1+2\frac{\phi}{c^2} \tag{4.1.3}$$

对史瓦西场由(3.2.11)式 $g_{00}=1-\dfrac{2GM}{c^2r}$，所以史瓦西场的引力势为

$$\phi=-\frac{GM}{r} \tag{4.1.4}$$

行星以及太阳一类恒星的引力场都是弱场，牛顿引力理论是相当好的近似。在下面的讨论中还可以具体了解相对论动力学方程如何在一阶近似下成为牛顿引力方程。

1938～1939 年间，爱因斯坦证明测地线假设包涵于场方程中，进一步揭示了时空、物质、运动、引力之间的统一性。

4.1.2 史瓦西场的守恒量

相对论中讨论自由粒子运动的动力学问题的另一途径：

从粒子运动的守恒定律出发讨论。

经典力学中球对称静止物体的引力场为中心力场，粒子的机械能守恒，对球心的角动量守恒。

相对论中，史瓦西场度规 $g_{\mu\nu}$ 只是 r、θ 的函数，与 t、φ 无关。$g_{\mu\nu}$ 与 t 无关表明 $g_{\mu\nu}$ 具有关于时间 t 的平移对称性，也就是无论时间 t 的原点如何变化，$g_{\mu\nu}$ 都不改变。同样，$g_{\mu\nu}$ 与 φ 无关表明 $g_{\mu\nu}$ 具有关于 φ 的旋转对称性，也就是无论绕 z 轴如何旋转，$g_{\mu\nu}$ 都不改变。一般来说，一种对称性对应着一种守恒定律（或者是一种选择定则）。对称性与守恒定律的关系是普遍规律，其适用范围远远超出牛顿力学的范畴，在量子力学和相对论中都是正确的。由对称性与守恒定律的关系，关于时间 t 的平移对称性对应着自由粒子的能量守恒，关于方位角 φ 的旋转对称性对应着粒子相应的角动量 L_φ 守恒。实际上由于球对称性，Z 轴可以任意选取，所以实质上也是对球心的总角动量守恒。

要应用能量和角动量的守恒定律，首先要确定相对论中能量和角动量的表达式。

4.1.3 史瓦西场中自由粒子能量和角动量

1. 自由粒子的能量

设自由粒子在 $P(r)$ 处的固有速度为 v。在 P 处瞬时静止的局静惯系 S' 中，按狭义相对论的能量公式该粒子能量为

$$E' = mc^2 = m_0\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}c^2$$

其中 m_0 为该粒子在局惯系中的静止质量。从 S' 系变换到引力场 S 系时，能量也要有相应的变换。

按牛顿力学考虑从无引力变化到引力场应该增加引力势能 $-G\dfrac{Mm_0}{r}$。

对比(1.4.2)式和(1.2.7)式，能量的坐标变换与时间的坐标变换相类似。局静惯系 S' 的时间 dt' 与引力场 S 系的固有时 $d\tau$ 相同，于是 $dt' = d\tau = \sqrt{g_{00}}dt$，也就是时间从 S' 系变换到 S 系时，要乘以因子 $\sqrt{g_{00}}$。因此能量从 S' 系变换到 S 系时也要乘以同样的因子 $\sqrt{g_{00}}$。所以 S 系的能量为

$$E = \sqrt{g_{00}}E' = \sqrt{g_{00}}mc^2 = \sqrt{g_{00}}m_0c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{4.1.5}$$

将 g_{00} 表达式(3.2.11)式代入得

$$E = m_0c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{4.1.6}$$

以上两式就是自由粒子在史瓦西场中的能量表达式。

由(4.1.6)式，在弱场情况下低速粒子能量近似为

$$E \approx m_0c^2\left(1 - \frac{GM}{c^2r}\right)\left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) \approx m_0c^2\left(1 + \frac{v^2}{2c^2} - \frac{GM}{c^2r}\right)$$

即

$$E \approx m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 - G\frac{Mm_0}{r} = m_0c^2 + E_N \tag{4.1.7}$$

其中 $E_N = \frac{1}{2}m_0v^2 - G\frac{Mm_0}{r}$ 是牛顿理论的机械能。由(4.1.7)式可知，在弱场低速的情况下，引力场中自由粒子总能量可以近似看作考虑了爱因斯坦静止能的经典理论总能量。

2. 能量守恒的应用

由能量守恒也可以讨论光谱的引力频移。对光子，从粒子角度其能量为 mc^2，从波动角度其能量由频率 ν 决定，即 $mc^2 = h\nu$。设 A 处光源发出固有频率为 ν_0 的光，在 B 处接收。由

(4.1.6)式以及光子能量守恒，有（注意光子只有动质量 m，其静止质量为零，速率为 c）

$$E=\sqrt{g_{00}}mc^2=\sqrt{g_{00}}h\nu=h\nu_0\left(1-\frac{2GM}{c^2r_A}\right)^{\frac{1}{2}}=h\nu_B\left(1-\frac{2GM}{c^2r_B}\right)^{\frac{1}{2}}$$

于是 B 处测的光子频率为

$$\nu_B=\nu_0\left(1-\frac{2GM}{c^2r_A}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{2GM}{c^2r_B}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

与 3.3.1 讨论的引力频移结果完全相同。

应用能量守恒可以计算在史瓦西场中从无限远自由下落的质点的速率。设无穷远处静止的质点的静止质量为 m_0，其能量为 $E=m_0c^2$。设当它自由下落到 r 处时速度为 v，由(4.1.5)式它的能量为$\sqrt{g_{00}}m_0c^2(1-v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$。再由能量守恒，质点运动过程中能量不变，即

$$E=m_0c^2=\sqrt{g_{00}}m_0c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

由此得到

$$g_{00}=1-\frac{v^2}{c^2}$$

从理论的严密性讲，此处的 g_{00}不能用(3.2.11)式表示的结果，因为推导(3.2.11)式的过程中，利用了(3.2.6)式：$v^2=2GM/r$，而我们在此处正是要证明(3.2.6)式。所以此处的 g_{00} 要引用第 6 章求解爱因斯坦场方程的结果——史瓦西外部解：$g_{00}=1-\frac{2GM}{c^2r}$，由此代入上式得到

$$v^2=\frac{2GM}{r} \tag{4.1.8}$$

这是严格的结果，已经用在(3.2.6)式中作为第 3 章讨论史瓦

西场时空的基础。所以从理论体系来说，严格讨论史瓦西场是离不开史瓦西外部解的。

3. 史瓦西场中的角动量 L_φ

在牛顿力学中，质点 m_0 绕 z 轴的角速度为 $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$，则它对 z 轴的角动量为

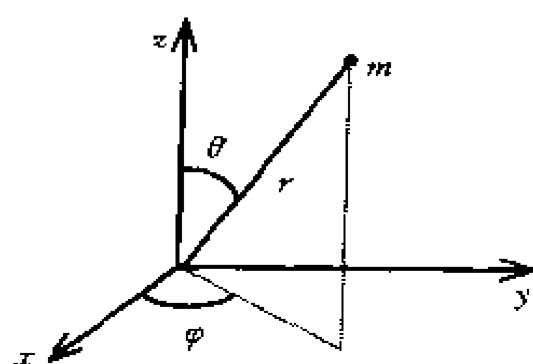


图 4.1.1

$$m_0 r^2 \sin^2\theta \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

在史瓦西场中粒子对 z 轴的角动量 L_φ 的表达式与牛顿力学的表达式很类似，只是把 m_0 换成动质量 m，时间间隔是用引力场的固有时间隔 $\mathrm{d}\tau$

$$L_\varphi = m r^2 \sin^2\theta \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau} = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} r^2 \sin^2\theta \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau} \quad (4.1.9)$$

实物粒子（质点）的性质与光子的性质有所不同，下面分别讨论质点和光子的运动规律。

4.2 史瓦西场中自由质点的运动和行星近日点的进动

4.2.1 自由质点的运动方程和轨道方程

为简单而又不失普遍性，取质点运动的面为 $\theta = \pi/2$ 的面。由于对称性，没有使质点离开此面的因素，质点将一直在该面上运动。于是 $\mathrm{d}\theta = 0$，L_φ 即总角动量 L。质点保持在 $\theta = \pi/2$ 的面上运动也正是角动量守恒的体现。则由（3.3.17）式，空间两点之间的真实距离为

$$d\sigma^2=\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}dr^2+r^2d\varphi^2=-g_{11}dr^2+r^2d\varphi^2$$

(4.2.1)

由(4.1.5)式和(4.1.9)式得

$$E^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=g_{00}m_0^2c^4 \tag{4.2.2}$$

$$L^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=m_0^2r^4\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \tag{4.2.3}$$

其中为了推导过程简练，用 g_{00} 和 $-g_{11}$ 分别代替 $\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)$ 和 $\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}$。(4.2.2)式与(4.2.3)式相除得

$$d\varphi^2=\frac{L^2c^4}{E^2r^4g_{00}}d\tau^2$$

将上式和(4.2.1)式以及 $v=d\sigma/d\tau$ 代入(4.2.2)式，消去 v^2 和 $d\varphi^2$ 得到相对论的自由质点运动方程

$$\sqrt{-g_{11}}\frac{dr}{d\tau}=\frac{c}{E}\left[(E^2-m_0^2c^4)+2\frac{GM}{r}m_0^2c^2-\frac{L^2c^2}{r^2}+2\frac{GM}{r^3}L^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

(4.2.4)

类似地，由(4.2.1)式、(4.2.2)式、(4.2.3)式以及 $v=d\sigma/d\tau$ 消去 v^2 和 $d\tau^2$ 得到相对论的自由质点轨道方程

$$\sqrt{-g_{11}}\frac{dr}{d\phi}=r^2\left[\frac{E^2}{L^2c^2}g_{00}^{-1}-\frac{m_0^2c^2}{L^2}-\frac{1}{r^2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.2.5}$$

由以上两式可以严格讨论自由质点的运动。

注意当 $r=2\frac{GM}{r}$ 时，g_{11} 无意义(又称为发散)，(4.2.4)式和(4.2.5)式只在 $r<2\frac{GM}{r}$ 时成立，因此只能讨论质点在 $r<2\frac{GM}{r}$ 区间的运动。

4.2.2 自由质点运动的定性讨论

相对论的质点运动方程与牛顿力学的质点运动方程不同，体现了相对论效应。我们不做详细的计算，只做定性的讨论，重点在于与牛顿力学的区别，即相对论效应的体现。

1. 质点沿径向运动

当质点沿径向运动时

$$L=0,\quad \mathrm{d}\varphi=0,\quad \sqrt{-g_{11}}\mathrm{d}r=\mathrm{d}\sigma$$

由(4.2.4)式得

$$v=\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\tau}=\frac{c}{E}\left[(E^2-m_0^2c^4)+2\,\frac{GM}{r}m_0^2c^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

由此可见，当质点向外运动时 r 不断增加。必须 $E\geqslant m_0c^2$，即$(E^2-m_0^2c^4)\geqslant 0$，在 $r\to\infty$时才可以保证根号内非负，因此要想到达无限远处，其能量 E 不能小于质点在惯性系的静止能量 m_0c^2。

当向内运动时，r 不断减少，v 不断增加，在 $r\to 2\,\frac{GM}{c^2}$时 $v\to c$，此时引力场非常强，这说明在强场中自由质点的速率不可能很低，所以低速条件同时要求弱场，否则不可能保持低速。

2. 低速弱场情况

在低速和弱场情况下，质点的运动可近似为牛顿力学中质点在质量 M 的中心力场里的运动。在低速弱场情况下，近似：(1)$\sqrt{-g_{11}}\approx 1$；(2)由(4.1.7)式 $E\approx m_0c^2+E_N$，而且 $E_N\ll m_0c^2$，因此(4.2.4)式括号外的 $E\approx m_0c^2$，括号内的 $E^2-m_0^2c^4\approx 2E_Nm_0c^2$；(3)$2\,\frac{GM}{r^3}L^2=2\,\frac{GM}{c^2r}\frac{L^2c^2}{r^2}\ll\frac{L^2c^2}{r^2}$，因此略去

$2\frac{GM}{r^3}L^2$。于是(4.2.4)式近似为

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\approx\sqrt{\frac{2}{m_0}}\sqrt{E_N-U_N} \tag{4.2.6}$$

其中

$$U_N=U_N(r)=\frac{L^2}{2m_0r^2}-G\frac{Mm_0}{r}$$

$U_N(r)$是牛顿理论中质点在万有引力场中的等效势能，$\frac{L^2}{2m_0r^2}$称为离心势能，是旋转非惯性系中由于惯性离心力引起的势能，(4.2.6)式就相当于在这个旋转非惯性系中的质点运动方程；$E_N=\frac{1}{2}m_0v^2-G\frac{Mm_0}{r}=$常数，是牛顿理论中质点在万有引力场中的机械能。(4.2.6)式正是牛顿引力理论的质点径向运动方程。这样相对论的质点运动动力学方程在低速和弱场下就近似为牛顿力学的方程。下面利用(4.2.6)式分析牛顿理论中，质点在万有引力的中心力场中的运动。

由(4.2.6)式可知为使该式有意义，粒子可能的运动出现在$E_N\geqslant U_N(r)$区域，不能无限地靠近力心，体现了离心势能的作用。

由图4.2.1(a)可见，当$E_N\geqslant 0$时，进入引力场的质点经近日点R沿双曲线或抛物线飞向无穷远，称此时粒子处于散射态。当$E_N<0$时，粒子束缚在场内，在r_1—r_2之间回旋运动，称之为束缚态。

3. 强场情况

此时$2\frac{GM}{r^3}L^2$与$\frac{L^2c^2}{r^2}$同量级不可忽略，从而质点的运动与牛顿力学情况有显著不同。令

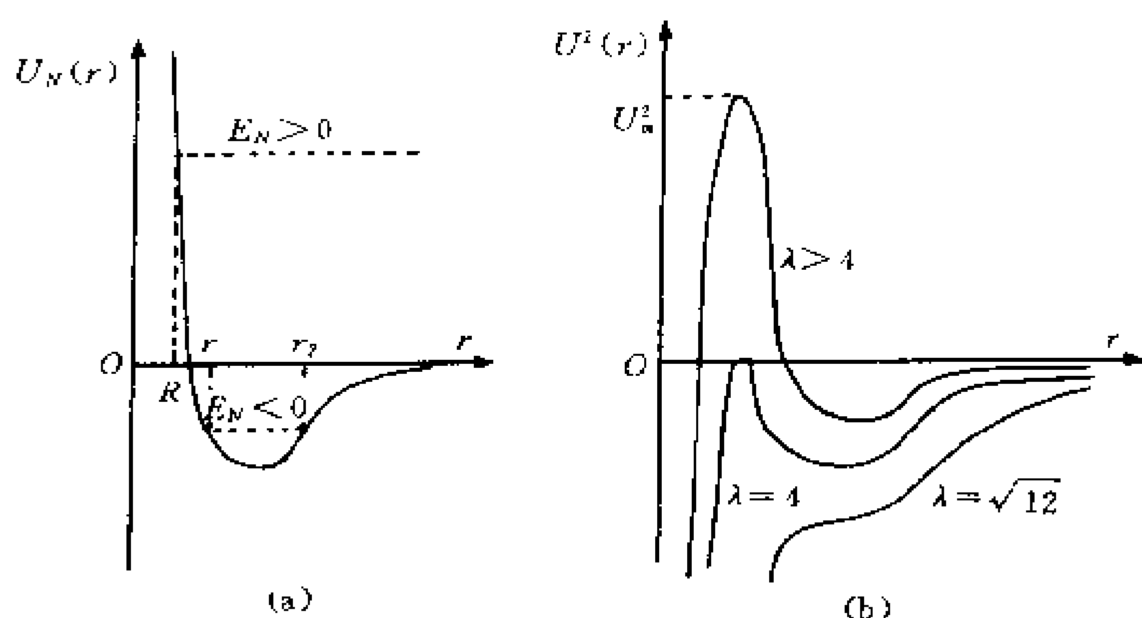


图 4.2.1

$$U^2(r)=\frac{L^2c^2}{r^2}-2\,\frac{GM}{r}m_0^2c^2-2\,\frac{GM}{r^3}L^2 \qquad (4.2.7)$$

则(4.2.4)式为

$$\sqrt{-g_{11}}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}=\frac{c}{E}\left[(E^2-m_0^2c^4)-U^2(r)\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (4.2.8)$$

为使(4.2.8)式有意义，可能的运动发生在一定的区域：

$$E^2-m_0^2c^4\geqslant U^2(r)$$

在定性上与牛顿力学情况不同的是，$U^2(r)$与$U_N(r)$的形状不同，导致了相对论情况下质点运动与牛顿力学的不同。为简单起见，令

$$L=\lambda GMm_0/c,\quad r=xGM/c^2$$

λ、x为无量纲的系数。下面讨论$U^2(r)$的形状与λ的关系。将上面两式代入(4.2.7)式得

$$U^2(r)=-\frac{m_0^2c^4}{x}\left(2-\frac{\lambda^2}{x}+2\,\frac{\lambda^2}{x^2}\right) \qquad (4.2.9)$$

令 $U^2(r)=0$，$U^2(r)$ 曲线与 r 轴交点坐标 $x_{1,2}$ 满足方程

$$2x^2-\lambda^2x+2\lambda^2=0$$

得

$$x_{1,2}=\frac{\lambda^2}{4}\left(1\pm\sqrt{1-16/\lambda^2}\right)$$

所以，当 $\lambda>4$ 时 $U^2(r)$ 曲线与 r 轴有两个交点 $r_{1,2}=x_{1,2}\dfrac{GM}{c^2}$，当 $\lambda=4$ 时 $U^2(r)$ 曲线与 r 轴只有一个交点 $r=\dfrac{4GM}{c^2}$，当 $\lambda<4$ 时 $U^2(r)$ 曲线与 r 轴没有交点。

$U^2(r)$ 曲线的另一个特点是是否有极值。为此将(4.2.9)式两边对 x 求导并让导数为零得

$$x^2-\lambda^2x+3\lambda^2=0$$

则曲线的驻点为

$$x_{1,2}=\frac{\lambda^2}{2}\left(1\pm\sqrt{1-12/\lambda^2}\right)$$

所以，当 $\lambda>\sqrt{12}$ 时，$U^2(r)$ 曲线有极大、极小值。极大值点为(极大值记为 U_m^2)

$$r_m=x_m\frac{GM}{c^2}=\frac{\lambda^2}{2}\left(1-\sqrt{1-12/\lambda^2}\right)\frac{GM}{c^2}$$

当 $\lambda\leqslant\sqrt{12}$ 时 $U^2(r)$ 曲线没有极值。λ 越大，U_m^2 越大，若 $\lambda\to\infty$ 则 $x_m\to3$，$U_m^2\to\lambda^2m_0^2c^4\to\infty$。$U^2(r)$ 曲线的形状见图 4.2.1(b)。

由图可知，(1)对 $\lambda>4$ 情况，若 $E^2-m_0^2c^4\geqslant U_m^2$ 时，质点回旋着向力心运动，称之为吸收态；当 $0\leqslant E^2-m_0^2c^4\leqslant U_m^2$ 时粒子为散射态；当 $U_{\min}^2\leqslant E^2-m_0^2c^4<0$ 时粒子为束缚态。(2)对 $\sqrt{12}<\lambda\leqslant4$ 的情况，粒子只有束缚态和吸收态。(3)对 $\lambda\leqslant\sqrt{12}$ 的情况，粒子只有吸收态。牛顿理论中没有吸收态。

4.2.3 质点运动轨道的相对论修正——行星近日点的相对论进动

1. 牛顿理论近似

在弱场低速情况下，相对论的轨道方程(4.2.5)式可近似为牛顿理论的轨道方程。取

$$g_{00}^{-1}\approx 1+2\frac{GM}{c^2r}(\text{一级近似})$$

$$-g_{11}\approx 1(\text{零级近似})$$

代入(4.2.5)式得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}=r^2\left\{\frac{1}{L^2c^2}\left[(E^2-m_0^2c^4)+2E^2\frac{GM}{c^2r}\right]-\frac{1}{r^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

由低速弱场近似，$E^2-m_0^2c^4\approx 2E_Nm_0c^2$。而第二项中$\frac{GM}{c^2r}$本身就是小量，故取它的系数 $E^2\approx m_0^2c^4$。将这两个近似关系代入上式得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}=r^2\left[2\frac{E_Nm_0}{L^2}+2G\frac{Mm_0^2}{L^2r}-\frac{1}{r^2}\right]^{\frac{1}{2}}\qquad(4.2.10)$$

这正是牛顿引力理论的轨道方程。

从相对论的动力学方程向牛顿力学的动力学方程的近似过程可见，在相对论中牛顿理论的近似在于：(1)空间是平直的，相当于 g_{11}取零阶近似；(2)存在引力，相当于 g_{00}取一阶近似；(3)$m\approx m_0$，$E\approx m_0c^2$。

积分(4.2.10)式，得到牛顿理论下的自由质点的运动轨道为圆锥截线。对束缚态粒子($E_N<0$)其轨道为椭圆，是闭合的。

2. 相对论修正

为得到相对论修正必须计算更高阶的近似，即 g_{00}^{-1}展开

为二阶近似，$\sqrt{-g_{11}}$展开为一阶近似：

$$\left.\begin{aligned} g_{00}^{-1} &\approx 1+2\frac{GM}{c^2r}+4G^2\frac{M^2}{c^4r^2} \\ \sqrt{-g_{11}} &\approx 1+\frac{GM}{c^2r} \end{aligned}\right\} \tag{4.2.11}$$

代入(4.2.5)式，整理之后得：

$$\begin{aligned} d\varphi &= \left(1+\frac{GM}{c^2r}\right)\left(\frac{\alpha}{r^2}+\frac{\beta}{r}+\gamma\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{dr}{r^2} \\ &= -\frac{1+GMu/c^2}{\sqrt{\alpha u^2+\beta u+\gamma}}du \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

其中

$$\alpha=-\left(1-4G^2\frac{M^2E^2}{L^2c^6}\right),\beta=2G\frac{ME^2}{L^2c^4}$$

$$\gamma=\frac{E^2-m_0^2c^4}{L^2c^2},u=\frac{1}{r}$$

(4.2.12)式与牛顿近似(4.2.10)式只有微小差别，这些差别引起的行星轨道椭圆参数的小变化是观测不出来的。但是分子项(由$\sqrt{-g_{11}}$的展开式引起)与1的差$G\frac{M}{c^2}u$和$|\alpha|$与1的差$4G^2\frac{M^2E^2}{L^2c^6}$还会使行星轨道不闭合，如图4.2.2，当行星从近日点(指行星轨道上距太阳最近的一点，是行星轨道上的一个标志点)A出发转一圈后，新的近日点A'并不与A重合而是向前进方向转过一个小角度$d\varphi$，这就是行星近日点由于相对论效应引起的进动，$d\varphi$称为进动角。$d\varphi$虽小但可以累积，长时间内可以观测出来。

行星为束缚态，r值连续地循环变化。由(4.2.12)式对$u=\frac{1}{r}$积分一个循环，记为“$\oint$”，对应的角度为$\Delta\varphi$。若轨道闭合

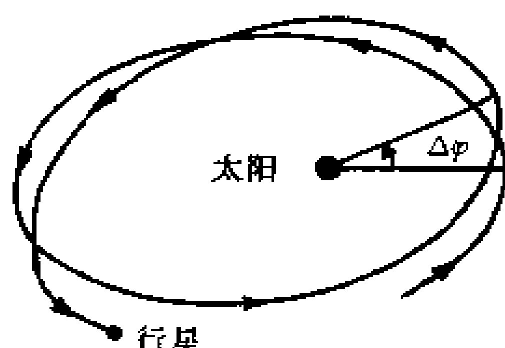


图 4.2.2　行星近日点的进动

（牛顿力学情况）$|\Delta\varphi| = 2\pi$。所以由于相对论效应引起的每圈进动角为

$$\mathrm{d}\phi = \left|\oint \frac{1 + GMu/c^2}{\sqrt{\alpha u^2 + \beta u + \gamma}}\mathrm{d}u\right| - 2\pi$$

$$= \left|\oint \frac{1}{\sqrt{\alpha u^2 + \beta u + \gamma}}\mathrm{d}u - \frac{GM}{c^2}\oint \frac{u}{\sqrt{\alpha u^2 + \beta u + \gamma}}\mathrm{d}u\right| - 2\pi$$

由积分表

$$\int \frac{u}{\sqrt{\alpha u^2 + \beta u + \gamma}}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha u^2 + \beta u + \gamma} - \frac{\beta}{2\alpha}\int \frac{1}{\sqrt{\alpha u^2 + \beta u + \gamma}}\mathrm{d}u$$

则积分一个循环时，上式右边第一项的积分为零，所以 $\mathrm{d}\varphi$ 为

$$\mathrm{d}\varphi = \left|\left(1 - G\frac{M\beta}{2c^2\alpha}\right)\oint \frac{1}{\sqrt{\alpha u^2 + \beta u + \gamma}}\mathrm{d}u\right| - 2\pi \tag{4.2.13}$$

积分

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{\sqrt{\alpha u^2 + \beta u + \gamma}}\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{-\alpha}}\sin^{-1}\frac{-2\alpha u - \beta}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}\Bigg|_{u_1}^{u_2}$$

出现在反正弦函数中的α、β、γ，只影响椭圆轨道参数。当连续变化一周时

$$\left|\sin^{-1}\frac{-2\alpha u-\beta}{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}\right|_{u}^{u}=2\pi$$

因此影响进动角的是反正弦函数的系数。将上述关系代入(4.2.13)式，再分别取一阶近似计算，于是

$$\begin{aligned}d\varphi&=\left(1-G\frac{M\beta}{2c^2\alpha}\right)\frac{2\pi}{\sqrt{-\alpha}}-2\pi\\&\approx\left(1+G^2\frac{M^2E^2}{L^2c^6}\right)2\pi\left(1+2G^2\frac{M^2E^2}{L^2c^6}\right)-2\pi\\&=6\pi\left(\frac{GME}{Lc^3}\right)^2\end{aligned}$$

可见α(来自$g_{00}{}^{1}$展开式中的二阶项)对$d\varphi$的贡献占2/3，g_{11}(空间弯曲)的贡献占1/3。有趣的是，狭义相对论中质量m随质点运动速度的改变而改变的关系也影响到行星近日点的进动，这项贡献占相对论总效应的1/6，当然这项贡献也已包含在广义相对论计算的总进动角中①。

近似取$E\approx m_0c^2$。由开普勒(J. Kepler，1571～1630)三定律可以得到

$$\frac{m_0^2}{L^2}=\frac{1}{GMa(1-e^2)}=\frac{1}{GMb\sqrt{1-e^2}}$$

其中a、b分别为椭圆轨道的长短半轴，e为椭圆偏心率，则

$$d\varphi=\frac{6\pi GM}{c^2a(1-e^2)}=\frac{6\pi GM}{c^2b\sqrt{1-e^2}}\qquad(4.2.14)$$

由于进动角是累积的，所以即使每圈进动很小，长时间观测也可以使精度较大提高，因此一般都是考虑百年的进动角。由

① 吴大猷. 相对论——理论物理(第四册). 科学出版社(1983).

(4.2.14)可知，a 越小 e 越大的行星进动越显著，下面表 4.2.1中所列的 Icarus 是 1949 年发现的小行星。从表中可见理论值与观测值相符，其中水星近日点相对论进动最大，观测精度最高，理论与实测符合得也最好。

表 4.2.1　行星近日点的相对论进动

行星	a (10^6km)	e	$d\varphi$(″/100 年)	
			理论计算值	观测值
水星	57.91	0.2056	43.03	43.11±0.45
金星	108.21	0.0068	8.6	8.4±4.8
地球	149.60	0.0167	3.8	5.0±1.2
Icarus	161.0	0.827	10.3	9.8±0.8

3. 行星近日点的总进动角

实际上行星近日点的总进动角 $\Delta\varphi$ 远远超过上述相对论效应引起的进动角 $d\varphi$，占主要地位的是太阳的转动以及其他行星的干扰等牛顿力学的高阶修正。例如对水星，实际的百年总进动观测值 $\Delta\varphi\approx5601''$，已知牛顿理论的高阶修正引起的进动角为每百年 $5557.62\pm0.20''$，其中的差值约为每百年 $43''$，长期得不到合理的解释。爱因斯坦建立广义相对论后，很快计算了广义相对论效应引起的水星近日点进动值恰为百年 $43''$，这是广义相对论惊人的成功，爱因斯坦给埃伦菲斯特的信中写到："……方程给出了水星近日点的正确数字，你可以想象我有多高兴，有好些天，我高兴得不知怎样才好。"

行星近日点进动的实验观测结果还有个重要意义，那就是定量地看到弱引力场中低速运动质点的问题上，广义相对论修正所占的比重是非常小的，只是牛顿力学的高阶修正的

1%，而广义相对论的高阶修正，如太阳的自转使太阳引力场不是严格的史瓦西场，影响到水星的进动值为 $-1.76\times10^{-3}{}''/100$ 年。

4.3 史瓦西场中光子的运动规律

4.3.1 史瓦西场中光子的运动规律

与质点不同，光子的静止质量为零，速度恒为 c。但光子仍有确定的守恒的能量和角动量以及不为零的动质量 m，所以仍可由(4.1.6)式和(4.1.9)式出发推导运动方程，只是不能使用 m_0 而要使用 m。仍取 $\theta=\pi/2$，$\mathrm{d}\theta=0$，由(4.1.6)式和(4.1.9)式得

$$E^2=g_{00}m^2c^4 \tag{4.3.1}$$

$$L^2=m^2r^4\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 \tag{4.3.2}$$

将(3.2.7)式以及 $\theta=\pi/2$ 和 $\mathrm{d}\theta=0$ 代入史瓦西场线元表达式(3.2.10)式得

$$\mathrm{d}s^2=c^2\mathrm{d}\tau^2-\left[\left(1-2\frac{GM}{c^2r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\varphi^2\right]$$

注意到光子时空间隔元 $\mathrm{d}s^2=0$，并记 $\left(1-2\frac{GM}{c^2r}\right)^{-1}=-g_{11}=g_{00}^{-1}$，则得到关系式

$$c^2\mathrm{d}\tau^2-g_{00}^{-1}\mathrm{d}r^2-r^2\mathrm{d}\varphi^2=0 \tag{4.3.3}$$

(4.3.1)式与(4.3.2)式相除消去 m，则有

$$r^4\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2=\frac{L^2}{E^2}g_{00}c^4 \tag{4.3.4}$$

从(4.3.3)式解出 $\mathrm{d}\varphi^2$ 代入上式得

$$g_{00}^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2=c^2\left(1-\frac{L^2c^2}{E^2}\frac{g_{00}}{r^2}\right)$$

再由 $d\tau^2=g_{00}dt^2$ 代入上式，得光子径向运动方程

$$\frac{dr}{dt}=cg_{00}\left(1-\frac{L^2c^2}{E^2}\frac{g_{00}}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.3.5}$$

从(4.3.3)式解出 $d\tau^2$ 代入(4.3.4)式得到光子轨道方程

$$\frac{dr}{d\varphi}=r^2\left(\frac{E^2}{L^2c^2}-\frac{g_{00}}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.3.6}$$

由(4.3.5)式和(4.3.6)式可以定性讨论光子的运动。光子可能活动的区域即上面两式根号内函数不小于零的区域

$$1-\frac{L^2c^2}{E^2}\frac{g_{00}}{r^2}=1-\frac{L^2c^2}{E^2}\frac{1-2GM/(c^2r)}{r^2}\geqslant 0$$

即

$$r^3-\frac{L^2c^2}{E^2}\left(r-2G\frac{M}{c^2}\right)\geqslant 0 \tag{4.3.7}$$

下面考虑从无穷远入射的光子，入射光线到原点距离为 b(称为瞄准距离)，则该光子的能量和角动量分别为

$$E=m_\infty c^2, L=m_\infty cb$$

其中 m_∞ 为无穷远处光子的动质量，引力场中光子的动质量随地点改变。$m_\infty c$ 相当于光子的动量，b 是动量取矩的距离，因此光子角动量为 $m_\infty cb$。将上面两式代入(4.3.7)式得

$$r^3-b^2\left(r-2G\frac{M}{c^2}\right)\geqslant 0$$

令 $b=\lambda\frac{GM}{c^2}$，$r=x\frac{GM}{c^2}$，则上式为

$$x^3-\lambda^2x+2\lambda^2\geqslant 0 \tag{4.3.8}$$

令 $f(x)=x^3-\lambda^2x+2\lambda^2$，其函数图形为图 4.3.1。由图可见(设球体质量的外半径非常小，不影响光线的入射，即光线可以射入质量的中心)：

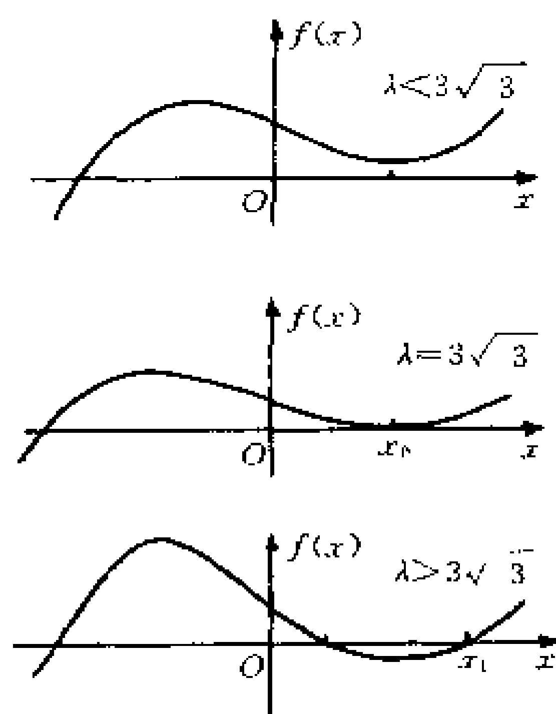


图 4.3.1

(1) $\lambda<3\sqrt{3}$，即 $b<3\sqrt{3}\,\frac{GM}{c^2}$时，允许范围为 $r\geqslant0$ 区域，入射光线将落入质量中心 O。

(2) $\lambda=3\sqrt{3}$，即 $b=b_0=3\sqrt{3}\,\frac{GM}{c^2}$时，允许范围为 $r\geqslant0$ 区域，实际上光子在不稳定的圆轨道上运动，圆轨道半径为 $r_0=x_0\,\frac{GM}{c^2}=3\,\frac{GM}{c^2}$。

(3) $\lambda>3\sqrt{3}$，即 $b>3\sqrt{3}\,\frac{GM}{c^2}$时，允许范围为 $r\geqslant x_1\,\frac{GM}{c^2}$区域，$r_1=x_1\,\frac{GM}{c^2}$为入射光线到中心的最近距离，光子到达最近距离 r_1 后，又出射到无穷远。其中 x_1 是 $f(x)=0$ 的三个实根中最大的，见图 4.3.1 中最下面的图。

以上三种情况的图示见图 4.3.2。

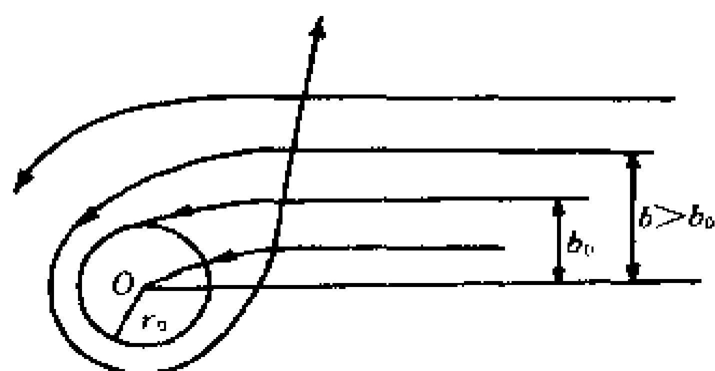


图 4.3.2

4.3.2 光子运动轨迹·太阳引力场中光线偏折角

在太阳引力场中讨论第三种情况：光子从无穷远入射，经近日点 A 后又向无穷远飞去。如图 4.3.3 所示，恒星射来的光子在太阳引力场中飞行，经过太阳边缘即近日点 A 后飞到地球。这样，分析光子的运动轨迹也就解决了太阳引力场引起的光线偏折问题。

对近日点 A 处，有关系 $\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)_{r=R}=0$，于是由(4.3.6)式得

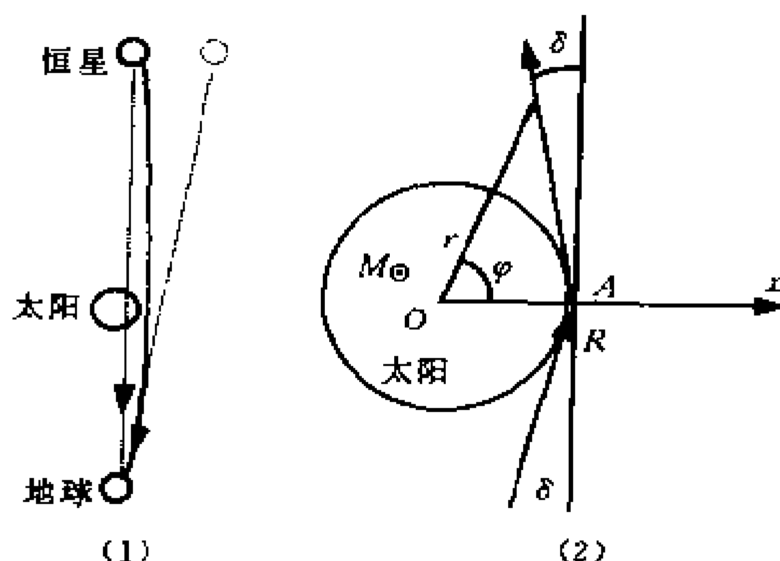


图 4.3.3

$$\frac{E^2}{L^2c^2}=\frac{g_{00}(R)}{R^2} \tag{4.3.9}$$

其中 $g_{00}=g_{00}(r)$ 是 r 的函数，$g_{00}(R)$ 表示 $r=R$ 时 $g_{00}(r)$ 的值。此式代入(4.3.6)式得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\varphi &= \frac{\mathrm{d}r}{r^2}\left[\frac{g_{00}(R)}{R^2}-\frac{g_{00}(r)}{r^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\mathrm{d}r}{r^2}\left[\frac{1}{R^2}-2G\frac{M}{c^2R^3}-\frac{1}{r^2}+2G\frac{M}{c^2r^3}\right]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{R\mathrm{d}r}{r^2}\left[1-\frac{R^2}{r^2}+2G\frac{M}{c^2R}\left(\frac{R^3}{r^3}-1\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

令 $u=R/r$，则上式简化为

$$\mathrm{d}\varphi=-\left[1-u^2+2G\frac{M}{c^2R}(u^3-1)\right]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u \tag{4.3.10}$$

积分此式，注意到 $r=R$ 即 $u=1$ 时，$\varphi=\varphi(R)=0$，于是得

$$\varphi(r)=-\int_1^u\left[1-u^2+2G\frac{M}{c^2R}(u^3-1)\right]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u \tag{4.3.11}$$

无引力即 $M=0$ 时

$$\varphi(r)=-\int_1^u\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\frac{R}{r}$$

其中 $\sin^{-1}$ 表示反正弦。于是当 $r\to\infty$ 时，

$$\varphi(\infty)=\frac{\pi}{2}$$

轨道曲线为 $\frac{R}{r}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$，即

$$r=\frac{R}{\cos\varphi}$$

这些表明光线在惯性系(无引力)是沿直线传播的，即沿图

4.3.3中与 x 轴垂直的直线。

有引力时光线向引力方向偏折，$\varphi(\infty)>\pi/2$，单向偏转角为

$$\delta=\varphi(\infty)-\pi/2$$

下面计算 $\varphi(\infty)$。当 $r\to\infty$ 时 $u\to 0$。首先要将(4.3.11)式近似为初等积分，其中 $2\frac{GM}{c^2R}(u^3-1)$ 作为小量。得到

$$\begin{aligned}\varphi(\infty)&=-\int_1^0\left[1-u^2+2\frac{GM}{c^2R}(u^3-1)\right]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u\\&\approx-\int_1^0\left[1-\frac{GM}{c^2R}\frac{u^3-1}{1-u^2}\right]\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}\\&=\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}-\frac{GM}{c^2R}\int_0^1\frac{u^3-1}{(1-u^2)^{3/2}}\mathrm{d}u\\&=\frac{\pi}{2}+2\frac{GM}{c^2R}\end{aligned}$$

其中第二项积分，可以利用三角函数变换来计算。于是得到单向偏折角

$$\delta=2\frac{GM}{c^2R}$$

总偏折角为

$$\mathrm{d}\varphi=2\delta=4\frac{GM}{c^2R} \tag{4.3.12}$$

取 $M=M_{\odot}$，$R=R_{\odot}$ 得太阳引力场中的最大偏转角 $\mathrm{d}\varphi=1.75''$。

观测的方法是在日全蚀时记录经过太阳边缘的恒星光线，与6个月前同一恒星的光线比较。如前面2.2.3所述，多年的观测证实光线在太阳引力场的实际偏折角与广义相对论的计算值相符，是支持广义相对论的重要实验检验。

前面2.2.3中还用牛顿理论推导过，太阳引力场引起的

光线偏折角恰好是广义相对论计算值的一半。

另外用太阳引力场的测地线方程计算[①]，可知其测地线偏离直线 0.875″。

这些计算揭示了太阳引力引起的恒星光线偏折 1.75″的内在本质，并得到实验观测的验证，在这个问题中还可看到，弱场下引力与空间弯曲的影响各占一半。

光线的引力偏折可以引起引力透镜效应。遥远星体发出的光线经过较强、较大的引力场时，光线向引力源偏折而产生汇聚效果，可以产生一个或多个畸变的放大像，就好像通过一个凸透镜一样，称之为引力透镜效应。图[②]4.3.4 的上图就是由哈勃望远镜拍摄的显示引力透镜效应的照片。来自遥远的类星体的光线被传播过程中遇到的一个星系的引力场弯曲——“折射”后，在照片上生成四个类星体的像。图 4.3.4 的下图表示，这四个像是中间星系的引力透镜作用产生的。

4.3.3 雷达回波延迟的严格计算

上一部分利用光子运动的轨道方程(4.3.6)式计算光子轨道的偏折角。这一部分利用光子的运动方程(4.3.5)式计算光线传播所需的时间，对雷达回波的引力延迟进行严格的计算。

将(4.3.9)式代入(4.3.5)式得

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}t &= \frac{1}{c g_{00}(r)}\left[1-\frac{g_{00}(r)R^2}{g_{00}(R)r^2}\right]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{c}\left(1-2\frac{GM}{c^2 r}\right)^{-1}\left[1-\right. \\
&\quad \left.\frac{R^2}{r^2}\left(1-2\frac{GM}{c^2 r}\right)\left(1-2\frac{GM}{c^2 R}\right)^{-1}\right]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}r
\end{aligned} \tag{4.3.13}$$

---

① 朗道，栗弗西斯著，场论，任朗等译，人民教育出版社(1959)。

② 图取自《科学》1995 年第 2 期 10 页。



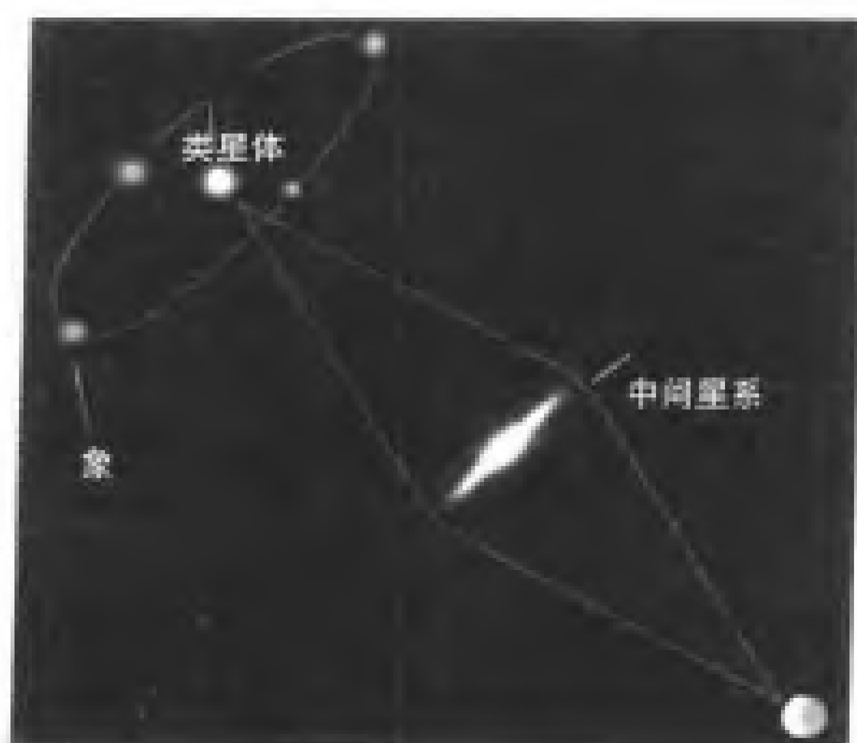


图 4.3.4　引力透镜

由于$\frac{GM}{c^2R}$是小量，取一阶近似就可以很容易地积分求出相对论效应引起的光线传播的时间延迟。上式近似为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}t &\approx \frac{1}{c}\left(1+2\frac{GM}{c^2r}\right)\left[1-\frac{R^2}{r^2}\left(1-2\frac{GM}{c^2r}\right)\left(1+2\frac{GM}{c^2R}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}r \\
&\approx \frac{1}{c}\left(1+2\frac{GM}{c^2r}\right)\left\{1-\frac{R^2}{r^2}\left[1+2\frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)\right]\right\}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{c}r\left(1+2\frac{GM}{c^2r}\right)\left[r^2-R^2-2\frac{GM}{c^2}R^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}r \\
&\approx \frac{1}{c}r\left(1+2\frac{GM}{c^2r}\right)\left[1+\frac{GM}{c^2}\frac{R^2}{r^2-R^2}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)\right]\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2-R^2}} \\
&\approx \frac{1}{c}r\left[1+2\frac{GM}{c^2r}+\frac{GM}{c^2}\frac{R^2}{r^2-R^2}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)\right]\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2-R^2}}
\end{aligned}
$$

上面详细地给出近似计算的过程。史瓦西场中的计算都是按这种形式进行的。积分此式就得到雷达波从近日点 A 到 r 处所需坐标时

$$
\begin{aligned}
\Delta t &\approx \int_R^r \frac{1}{c}\left[1+2\frac{GM}{c^2r}+\frac{GM}{c^2}\frac{R^2}{r^2-R^2}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)\right]\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2-R^2}} \\
&= \frac{1}{c}\left[\sqrt{r^2-R^2}+2\frac{GM}{c^2}\ln\left(r+\sqrt{r^2-R^2}\right)+\right. \\
&\quad \left.\left.\frac{GM}{c^2}R^2\left(-\frac{1}{R\sqrt{r^2-R^2}}+\frac{r}{R^2\sqrt{r^2-R^2}}\right)\right]\right|_R^r \\
&= \frac{1}{c}\left[\sqrt{r^2-R^2}+2\frac{GM}{c^2}\left(\ln\frac{r+\sqrt{r^2-R^2}}{R}+\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r-R}{r+R}}\right)\right]
\end{aligned} \tag{4.3.14}
$$

无引力即 $M=0$ 时传播时间为第一项，所以由于引力引起的延迟时间为第二、三项。设 r_1、r_2 分别为日地、日与行星的坐标

距离。考虑到在雷达波的传播过程中，各有两次从 A 到地球和从 A 到行星的旅程，因此雷达回波的延迟时间为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\tau &= \mathrm{d}t \\
&\approx 4\frac{GM}{c^3}\left[\ln\frac{1}{R^2}\left(r_1+\sqrt{r_1^2-R^2}\right)\left(r_2+\sqrt{r_2^2-R^2}\right)+\right. \\
&\left.\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{r_1-R}{r_1+R}}+\sqrt{\frac{r_2-R}{r_2+R}}\right)\right] \qquad (4.3.15)
\end{aligned}
$$

由于 $r_1, r_2 \gg R$，则上式可以进一步简化为

$$
\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}t\approx 4\frac{GM}{c^3}\left(\ln\frac{4r_1r_2}{R^2}+1\right) \qquad (4.3.16)
$$

上节将光子轨迹简化为偏角为 δ 的斜直线。用运动学方法计算雷达回波的延迟时间与(4.3.15)式有微小差别，在 r_1，$r_2 \gg R$ 情况下，结果与(4.3.16)式相同，说明远离太阳处的光线非常接近于直线。实验观测结果与理论计算相符，详见 3.3.3 节。

4.3.4 弱引力场中时空弯曲对自由粒子运动的影响

弱引力场中时空的零阶近似为闵可夫斯基空间。

低速运动($v \ll c$)质点的世界线在闵可夫斯基图(见 1.4 节)上与时间轴接近平行，所以时间维度的微小的变化对质点世界线产生一阶效应，而空间维度同样微小变化产生二阶效应。时间维度零阶近似(即取 $g_{00}\approx 1$)，成为闵可夫斯基空间引力为零的情况。时间维度一阶近似，空间维度零阶近似，就成为欧几里得空间中存在引力情况，也就是牛顿引力理论。相对论效应出现在时间维度取二阶近似(即 g_{00} 展开到二阶)，空间维度近似到一阶，也正是在推导(4.2.12)式所用的近似方法，体现出 g_{00} 和 g_{11} 对质点运动的影响效果不同，而积分结果表明，g_{00} 的二阶小项(体现在 α 上)和 g_{11} 的一阶小项对近日点进

动的贡献是相当的。

光子速度为 c，在闵可夫斯基图上其世界线是对角的，时间维的微小变动和空间维的微小变动对世界线的影响是相当的，在光线的引力偏转中时间弯曲和空间弯曲的贡献各占一半。在讨论光子的运动中 g_{11} 和 g_{00} 应取同阶近似，因此在推导(4.3.5)式和(4.3.6)式时，不再区分 g_{11} 和 g_{00}，取 $g_{11}=-g_{00}^{-1}$ 代入计算。

第5章　直线运动的常加速度内禀刚性加速系

前面讨论的是真实的引力场，主要是球对称的史瓦西场中的时间与空间，以及在史瓦西场中自由粒子的运动，这是广义相对论要解决的主要问题。另一方面，广义相对论把相对性原理扩展到加速参考系，将惯性力等效为引力，解决了加速系的问题。这里介绍最简单的一类加速系——相对惯性系做直线运动的常加速度内禀刚性非惯性系，以及与等效引力场相应的时空变换。在此基础上可以严格讨论著名的双生子问题。讨论的方法还是利用狭义相对论的两个惯性系之间的时间间隔和长度的变换，以及时钟和长度与加速度无关的假设。

5.1　具有内禀刚性的直线运动非惯性系

“内禀刚性”参考系指在该参考系看来自己是个刚性参考系，相当于一个刚性的坐标系框架，构成参考系的各点保持相对静止，彼此之间的固有距离在运动中保持不变。在别的参考系观测，该参考系内各点之间距离随时间不断改变，并不是刚性的。所以称此参考系的“刚性”为“内禀刚性”。由等效原理在该参考系中的观察者认为存在一个等效引力场。为简单起见，本章讨论静引力场，即参考系的度规 $g_{\mu\nu}$ 与 t 无关的情况。

5.1.1　基本微分关系式

首先建立惯性系和加速系坐标之间的微分关系式。

设：S 系为惯性系，坐标为(x,y,z,ct)；S' 系为内禀刚性加速系，坐标为(x',y',z',ct')，沿 x 轴运动。

在 S 系看，t 时刻 S' 系中各点的运动速度各不相同，与它们所在的位置 x' 有关。盯住 S' 系中确定的点 x'，其 t 时刻的坐标为 $x(x',t)$，$t+\mathrm{d}t$ 时刻坐标为 $x(x',t+\mathrm{d}t)$，于是 x' 点相对 S 系的速度为：

$$v=\frac{x(x',t+\mathrm{d}t)-x(x',t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{x'} \tag{5.1.1}$$

其中括号外面的脚标 x' 指在微分过程中 x' 作为常数。注意，由于 S 系是惯性系，所以坐标时 t 就是固有时，速度 v 就是固有速度。

在 S' 系看，自己参考系中各点静止不动，S 系向相反方向运动，t' 时刻 S 系中各点的运动速度各不相同，其中 t'（与 t 对应）时刻与 x' 对应的 x 点运动速度为 $-v$。于是与上面讨论方法类似，在 S' 系测量速度为：

$$v=-\left(\frac{\partial x'}{\partial \tau'}\right)_{x} \tag{5.1.2}$$

其中 τ' 是 S' 系的固有时。由于 S' 系是非惯性系，坐标时 t' 与固有时 τ' 不同。

类似 3.2 节讨论史瓦西场中固有时、固有长度与坐标时、坐标长度关系的方法，为应用狭义相对论关于时间和长度的讨论结果，在 $t(t')$ 时刻在 x' 处建立与 x' 瞬时静止的惯性系 S_0。则 S_0 系相对 S 系的速度为 v，S_0 系与 S 系之间的坐标变换关系是两个惯性系之间的洛伦兹变换。由爱因斯坦关于时钟和长度与加速度无关的假设，S_0 系的时间和长度等于此刻 S' 系中 x' 处的固有时和固有长度。所以可以用洛伦兹变换讨论 S 系与 S' 系中的时间和长度的关系。

(1)讨论时间关系。用 S 系时钟给 S' 系一个时钟(位于 x' 处)对表,即对 S' 系一个固定点 x' 有

$$d\tau' = \sqrt{1-v^2/c^2}dt \tag{5.1.3}$$

其中 S' 系的固有时间隔 $d\tau'$ 相当于原时(同一地点的两事件时间间隔),S 系的时间间隔 dt 相当于非原时(不同地点的两事件时间间隔)。为了明确表示 x' 不变的条件,将(5.1.3)式改写为

$$\left(\frac{\partial \tau'}{\partial t}\right)_{x'} = \sqrt{1-v^2/c^2} \tag{5.1.4}$$

反过来,用 S' 系时钟给 S 系一个时钟(位于 x 处)对表,即对 S 系一个固定点 x 有

$$dt = \sqrt{1-v^2/c^2}d\tau' \tag{5.1.5}$$

此时,$d\tau'$ 相当于非原时(不同地点的两事件时间间隔),dt 相当于原时(同一地点的两事件时间间隔)。为了明确表示 x 不变的条件,将(5.1.5)式改写为

$$\left(\frac{\partial t}{\partial \tau'}\right)_{x} = \sqrt{1-v^2/c^2} \tag{5.1.6}$$

(2)讨论长度关系。在 S 系同一时刻 t 测量 S' 系 x' 附近固有长度 dx',则 dx' 相当于原长,S 系的测量结果 dx 相当于动长,于是有

$$dx' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}dx \tag{5.1.7}$$

为了明确表示 t 不变的条件,将(5.1.7)式改写为

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)_{t} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{5.1.8}$$

反过来,在 S' 系同一时刻 t' 测量 S 系 x 附近长度 dx,则 dx 相当于原长,S 系的测量结果(S' 系固有长度)dx' 相当于

动长，于是有

$$\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\mathrm{d}x' \tag{5.1.9}$$

为了明确表示 t' 不变的条件，将(5.1.9)式改写为

$$\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)_{t'}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{5.1.10}$$

垂直于运动方向上：

$$y'=y,\quad z'=z \tag{5.1.11}$$

(5.1.3)～(5.1.11)式来自 S' 系为内禀刚性的假设。如果 S' 系内各点之间没有确定的固有长度，那么 S' 系与 S 系的时间和长度之间不存在洛伦兹变换的关系。

要了解加速系的性质，以及利用加速系讨论问题，首先必须找到 S 系和 S' 系之间的坐标变换关系。

5.1.2 坐标变换关系的推导

由上面微分关系式，以及适当的初始条件，可以建立 S、S' 系之间的坐标变换关系式。推导过程不难，但是比较繁，读者可以只看一下思路和方法，具体计算可以忽略。

1. 求 S' 系 x' 点的运动速度 $v(x',t)$

在 S 系观察 S' 系中静止在 x' 处的质点 A 的运动。它随 S' 系在惯性系 S 系中做加速运动，必受到加速度方向的合外力。在 S' 系分析该质点的受力情况，应该受力平衡，即所受外力与引力大小相等，方向相反。加速系的度规与时间无关，则引力场的强度也与时间无关，即 S' 系中各点引力只是坐标 x' 的函数，与时间无关。因此质点 A 所受的合外力也只是坐标 x' 的函数，与时间无关。由力的变换关系(1.4.5)式可知，在局静惯系 S_0(从而在 S' 系)和在 S 系观测，质点 A 所受合外力是相等的，所以在 S 系看该力也与时间无关。设该质点的静止

质量为 m_0，所受合外力为 F，则

$$F=-F_{引}(x')=F(x') \tag{5.1.12}$$

于是在 S 系的观察者看来，质点 m_0 在恒力 $F(x')$ 作用下运动。

由 1.3.3 中的例子可知，该质点的运动规律为

$$v=\frac{F(x')t/m_0}{\sqrt{1+[F(x')t/(m_0c)]^2}}=\frac{a_It}{\sqrt{1+(a_It/c)^2}} \tag{5.1.13}$$

其中定义加速系 S' 系 x' 处质点 A 的固有加速度

$$a_I=a_I(x')=F(x')/m_0 \tag{5.1.14}$$

仍从该例知，质点的加速度为(只有 x 方向的分量)

$$a=a_I(1-v^2/c^2)^{3/2}=\frac{a_I}{[1+(a_It/c)^2]^{3/2}} \tag{5.1.15}$$

2. 确定 $a_I(x')$ 的函数关系

由于 S' 系是内禀刚性的加速系，所以系内各点的固有加速度之间应该有一定的关系，即 a_I 应该是 x' 的确定的函数。

速度 v 是 x'、t 的函数，即 $v=v(x',t)$，于是

$$\frac{\partial v}{\partial x'}=\frac{\partial^2 x}{\partial x'\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)_t$$

其中括号外面的脚标 t 强调在微分过程中 t 作为常数。将(5.1.8)式代入得

$$\frac{\partial v}{\partial x'}=\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{1-v^2/c^2}\right)\right]_{x'}=-\frac{v}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{\partial v}{\partial t}$$

将(5.1.13)式代入。为简单起见，令 $u=\frac{a_I(x')t}{c}$，则 $v=\frac{cu}{\sqrt{1+u^2}}$。代入上式得

$$\frac{\partial v}{\partial x'}=-\frac{u}{c}\frac{\partial v}{\partial t} \quad 即 \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial x'}=-\frac{u}{c}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial t}$$

两边约去$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$，将 u 代入得

$$\frac{\mathrm{d}a_I}{a_I^2}=-\frac{\mathrm{d}x'}{c^2}$$

对 S' 系原点 $x'=0$ 处 $a_I=$ 常数 a_0，所以有积分$\int_{a_0}^{a_I}\frac{\mathrm{d}a_I}{a_I^2}=-\frac{1}{c^2}\int_0^{x'}\mathrm{d}x'$。得到

$$a_I(x')=\frac{a_0}{1+a_0x'/c^2} \tag{5.1.16}$$

为保证 $a_I(x')$ 有意义，只讨论 $(1+a_0x'/c^2)>0$ 区域。

3. 第一个坐标变换关系式

仍在 S 系讨论质点 A 的运动。

初始条件为：$t=t'=0$ 时，S、S' 两系完全重合，S' 系开始运动。因此对质点 A 来说

$$v(0)=0, \quad x(0)=x'$$

于是 t 时刻 A 的坐标 x 为（仍取 $u=\frac{a_I(x')t}{c}$，注意 $t=0$ 时 $u=0$）

$$\begin{aligned}
x-x(0)&=\int_0^t v\mathrm{d}t=c\int_0^t\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}t\\
&=\frac{c^2}{a_I}\int_0^u\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u\\
&=\frac{c^2}{a_I}\left[(1+u^2)^{\frac{1}{2}}-1\right]
\end{aligned} \tag{5.1.17}$$

方程即

$$\frac{a_I}{c^2}[x-x(0)]=\left[1+\left(\frac{a_It}{c}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}-1 \tag{5.1.18}$$

将(5.1.16)式代入，方程两边同乘$\left(1+\frac{a_0x'}{c^2}\right)$得

$$\frac{a_0}{c^2}[x-x(0)]=\left[\left(1+\frac{a_0x'}{c^2}\right)^2+\left(\frac{a_0t}{c}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}-\left(1+\frac{a_0x'}{c^2}\right)$$

由于$x(0)=x'$，上式两边可以消去$\frac{a_0}{c^2}x(0)$和$\frac{a_0x'}{c^2}$，得到第一个坐标变换关系式

$$\left(1+\frac{a_0x'}{c^2}\right)^2=\left(1+\frac{a_0x}{c^2}\right)^2-\left(\frac{a_0t}{c}\right)^2 \tag{5.1.19}$$

将(5.1.16)式代入(5.1.13)式得到

$$v=\frac{a_0t}{\sqrt{(1+a_0x'/c^2)^2+(a_0t/c)^2}}$$

$$=\frac{a_0t}{1+a_0x/c^2} \tag{5.1.20}$$

其中最后一步利用了(5.1.19)式。

4. 第二个坐标变换关系式

S'系的坐标时为t'。S'系为加速系，相当于在引力场中，由(3.4.1)式，引力场S'系固有时$d\tau'$与坐标时dt'的关系为

$$d\tau'=\sqrt{g_{00}}dt' \tag{5.1.21}$$

S'系的度规$g_{\mu\nu}$与时间无关，仅是x'的函数，因此$g_{00}=g_{00}(x')$。下面由广义相对论的能量守恒求$g_{00}(x')$的表达式。

因为S'系的度规$g_{\mu\nu}$与时间无关，所以S'系自由质点的能量守恒。考虑在S'系$t=t'=0$时刻位于原点$(x=x'=0)$处静止质量为m_0的自由质点。设：该时刻它恰好静止，由(4.1.5)式，在S'系它的能量为

$$E'=\sqrt{g_{00}(0)}m_0c^2 \tag{5.1.22}$$

其中$g_{00}(0)$代表$x'=0$处的g_{00}。该自由质点只受引力作用不

受外力，因此在 S 系它将始终静止在 $x=0$ 处；在 S' 系观察它速度不断增加，t 时刻在 x' 处，速度即 S 系原点的速度。由(4.1.5)式此时它的能量为

$$E'=\sqrt{g_{00}(x')}(1-v^2/c^2)^{-1/2}m_0c^2 \qquad (5.1.23)$$

由能量守恒，(5.1.22)式与(5.1.23)式相等，得到

$$\sqrt{g_{00}(x')}=\sqrt{g_{00}(0)}(1-v^2/c^2)^{1/2}$$

由(5.1.20)式并利用(5.1.19)式，得

$$(1-v^2/c^2)^{1/2}=\frac{\sqrt{(1+a_0x/c^2)^2-(a_0t/c)^2}}{1+a_0x/c^2}$$

$$=\frac{1+a_0x'/c^2}{1+a_0x/c^2} \qquad (5.1.24)$$

注意到此处 $x=0$，因此 $(1-v^2/c^2)^{1/2}=1+a_0x'/c^2$

代入上式得

$$\sqrt{g_{00}(x')}=\sqrt{g_{00}(0)}(1+a_0x'/c^2)$$

其中 $\sqrt{g_{00}(0)}$ 是常数。在弱场即 $\frac{a_0x'}{c^2}\ll 1$ 情况下，S' 系应该近似为闵可夫斯基空间，即 $g_{00}(x')\to 1$，故应有

$$g_{00}(0)=\text{常数}=1$$

所以

$$g_{00}(x')=\left(1+\frac{a_0x'}{c^2}\right)^2 \qquad (5.1.25)$$

有微分关系式 $\left(\frac{\partial t}{\partial t'}\right)_{x'}=\left(\frac{\partial t}{\partial \tau'}\right)_{x'}\left(\frac{\partial \tau'}{\partial t'}\right)_{x'}$。将(5.1.4)式和(5.1.21)式代入，并利用(5.1.24)和(5.1.25)式得

$$\left(\frac{\partial t}{\partial t'}\right)_{x'}=\frac{\sqrt{g_{00}(x')}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=1+\frac{a_0x}{c^2}$$

$$=\sqrt{(1+a_0x'/c^2)^2+(a_0t/c)^2}$$

其中最后一步利用了(5.1.19)式。

上面的微分关系式中，x'为常数，于是可以直接积分

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1+a_0x'/c^2)^2+(a_0t/c)^2}}=\int_0^{t'}\mathrm{d}t'$$

得

$$t'=\frac{c}{a_0}\left\{\ln\left[\frac{a_0t}{c}+\sqrt{\left(1+\frac{a_0x'}{c^2}\right)^2+\left(\frac{a_0t}{c}\right)^2}\right]-\ln\left(1+\frac{a_0x'}{c^2}\right)\right\}$$

利用(5.1.19)式得

$$t'=\frac{c}{a_0}\left[\ln\left(\frac{a_0t}{c}+1+\frac{a_0x}{c^2}\right)-\ln\sqrt{\left(1+\frac{a_0x}{c^2}\right)^2-\left(\frac{a_0t}{c}\right)^2}\right]$$

整理后得到第二个坐标变换关系式

$$t'=\frac{c}{2a_0}\left[\ln\left(1+\frac{a_0x}{c^2}+\frac{a_0t}{c}\right)-\ln\left(1-\frac{a_0x}{c^2}-\frac{a_0t}{c}\right)\right]$$

(5.1.26)

坐标变换关系式合在一起为

$$\left.\begin{aligned}&\left(1-\frac{a_0x'}{c^2}\right)^2=\left(1+\frac{a_0x}{c^2}\right)^2-\left(\frac{a_0t}{c}\right)^2\\&y'=y\\&z'=z\\&t'=\frac{c}{2a_0}\left[\ln\left(1+\frac{a_0x}{c^2}+\frac{a_0t}{c}\right)-\ln\left(1+\frac{a_0x}{c^2}-\frac{a_0t}{c}\right)\right]\end{aligned}\right\}\quad(5.1.27)$$

从上式中解出x、t得到坐标变换的逆变换

$$\left.\begin{aligned}
x&=\frac{c^2}{a_0}\left[\left(1+\frac{a_0x'}{c^2}\right)\mathrm{ch}\,\frac{a_0t'}{c}-1\right]\\
y&=y'\\
z&=z'\\
t&=\frac{c}{a_0}\left(1+\frac{a_0x'}{c^2}\right)\mathrm{sh}\,\frac{a_0t'}{c}
\end{aligned}\right\}\qquad(5.1.28)$$

式中 $\mathrm{sh}x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$ 称为双曲正弦函数，$\mathrm{ch}x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$ 称为双曲余弦函数。

5. 符号规定

上述推导以 S 系为基础，S' 系的运动方向以向右（$+x$）为正，于是有下面的符号规定。

（1）S 系看：

若 S' 系速度（加速度）方向为 $+x$ 时，取 v、a_0 为正；

若 S' 系速度（加速度）方向为 $-x$ 时，取 v、a_0 为负。

（2）S' 系看：

若引力场方向或 S 系速度（加速度）方向为 $+x'$ 时，取 v、a_0 为负；

若引力场方向或 S 系速度（加速度）方向为 $-x$ 时，取 v、a_0 为正。

坐标变换关系式（5.1.27）和（5.1.28）两式最早由 C. Moller 在 1943 年提出，在他的著作[①]中也有较详细的讨论，

---

① C. Moller, *The theory of Relativity*, 2d Edition, Oxford University Press.

讨论的方法和我们的方法完全不同，吴大猷[①]等人曾详加讨论。这里的推导参考了吴大猷著的《相对论——理论物理第四册》中提到的要点，但是有重大改变。有兴趣的读者，可参考该文。

5.2 内禀刚性直线运动非惯性系的性质

由上面推导坐标变换关系式的过程以及坐标变换关系式，可以分析上述具有内禀刚性的加速系的一些性质。

5.2.1 内禀刚性加速系的基本性质

1. S'系的运动

在 S 系同一时刻观察 S'系的运动，由(5.1.20)式和(5.1.15)式可知 S'系上各点的速度 v 和加速度 a 都是 x'的函数，不同地点的速度和加速度各不相同，因此在 S 系看来，S'系不再是刚性参考系。但是另一方面，S'系各点的速度和加速度有一定的关系，例如我们知道 t 时刻某一点 x'的速度，就可以求出 a_0，从而由(5.1.20)式和(5.1.15)式确定各点的速度和加速度，即确定整个 S'系的运动规律。从这个意义上说，S'系是个非常特殊的加速系，可以说整个参考系具有"整体"的运动。

2. 坐标变换关系式

与伽利略变换和洛伦兹变换不同，(5.1.27)和(5.1.28)式代表的坐标变换不是线性的。

$t=0$ 时刻，由(5.1.20)式 $v=0$，S 系、S'系相对静止，两

---

① 吴大猷. 相对论——理论物理(第四册). 科学出版社(1983). 或：Wu, Ta-You, and Y. C. Lee, The clock paradox in the Relativity theory. *International Journal of Theoretical Physics*. 5, 307—323.

系的时间和长度相同，由(5.1.27)式，$t'=0$。因此，在 $t=t'=0$ 时刻，可以选 S 系、S' 系的任意对应点作为两个坐标系的原点，都满足前面推导过程中对初始条件的要求。

由坐标变换关系式(5.1.27)和(5.1.28)式可以验证 S 系、S' 系的时间和长度的微分关系式(5.1.4)、(5.1.6)、(5.1.8)、(5.1.10)。

例如由(5.1.28)式得(还要利用(5.1.24)式)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)_t=\mathrm{ch}\,\frac{a_0 t'}{c}=\frac{1+a_0 x/c^2}{1+a_0 x'/c^2}=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

这正是(5.1.10)式。

以及(还要利用双曲函数的微分性质：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{sh}x=\mathrm{ch}x$)

$$\left(\frac{\partial t}{\partial t'}\right)_{x'}=\left(1+\frac{a_0 x'}{c^2}\right)\mathrm{ch}\,\frac{a_0 t'}{c}=1+\frac{a_0 x}{c^2}$$

因此

$$\left(\frac{\partial t}{\partial \tau'}\right)_{x'}=\left(\frac{\partial t}{\partial t'}\right)_{x'}\left(\frac{\partial t'}{\partial \tau'}\right)_{x'}=\left(\frac{\partial t}{\partial t'}\right)_{x'}\Big/\sqrt{g_{00}(x')}$$

$$=\frac{1+a_0 x/c^2}{1+a_0 x'/c^2}=(1-v^2/c^2)^{-1/2}$$

这正是(5.1.4)式，其中用到(5.1.21)式：

$$\left(\frac{\partial t'}{\partial \tau'}\right)_{x'}=1\Big/\sqrt{g_{00}(x')}$$

类似地，由(5.1.27)式可以验证(5.1.6)和(5.1.8)式。

3. 固有加速度 $a_I(x')$

前面推导过程中定义固有加速度 $a_I(x')=F(x')/m_0=-F_{引}/m_0$，是该处质点所受引力与质点静止质量之比，然后计算出 $a_I(x')=\frac{a_0}{1+a_0 x'/c^2}$。在 S 系测量 S' 系中 x' 处在 t 时刻的速度为 v，加速度为 $a=a_I(1-v^2/c^2)^{3/2}=a_x$。

设在 x' 处 t 时刻相对 S' 系瞬时静止的惯性系 S_0 中测量 x' 处 t 时刻的加速度为 a^0。S_0 系相对 S 系以 v 运动，因此 S 系测量的加速度 a（见(5.1.15)式）与 a^0 的关系满足(1.2.15)所示的变换关系。所以

$$a^0=\frac{a}{[\gamma(1-v^2/c^2)]^3}=\frac{a}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}=a_I$$

由此可知，a_I 就是用 S_0 系的时钟和尺子也就是 S' 系的固有时和固有长度测量的加速度，因此称之为固有加速度。

5.2.2 只有一种常加速度的内禀刚性直线运动加速系

S' 系中每个固定点的固有加速度 a_I 都是常数，与 t 无关，因此可以说 S' 系中每个固定点在做匀加速运动。在这个意义上，并且为了和固有加速度与时间 t 有关的其他直线运动内禀刚性非惯性系相区别，我们称 S' 系为常加速度直线运动内禀刚性参考系。与我们通常了解的经典力学中的匀加速参考系不同，后者整个参考系有共同的不变的加速度，而我们讨论的 S' 系各点的固有加速度互不相同，整个参考系没有共同的加速度。(5.1.27)和(5.1.28)式代表了所有具有内禀刚性的常加速度直线运动的参考系。

从坐标变换知，a_0 取不同的数值，可以得到无穷多个 S' 系。这些 S' 系的运动规律即其速度和加速度分别由(5.1.20)式和(5.1.15)式给出。分析(5.1.20)式，对 S' 系中确定地点 x'，t 时刻它在 S 系中的速度 v 是完全确定的

$$v(x',t)=\frac{a_0t}{\sqrt{(1+a_0x'/c^2)^2+(a_0t/c^2)}}\xrightarrow{t\to\infty}c$$

同样分析(5.1.15)式，t 时刻 x' 点在 S 系中的加速度 a 也是完全确定的（其中 $a_I=a_I(x')$，为常数）

$$a(x',t)=\frac{a_l}{[1+(a_l t/c)^2]^{3/2}}\xrightarrow{t\to\infty}0$$

因此，在 S 系中盯住 S' 系的某一点，其运动规律是完全确定的，不同点的运动又是类似的。所以在 S 系看来，具有内禀刚性的匀变速直线运动加速系虽然由于 a_0 的不同有无穷多个，但是按其运动规律来划分，却只有**一种**，都是从速度为零开始，向左或向右加速运动，速度越来越快，加速度越来越小，最后为接近光速的惯性系。

实际上，a_0 是 $t=0$ 时刻 $x'=0$ 处在 S 系测量的加速度，称为 S' 系原点的初始加速度或原点的固有加速度。$t=0$ 时刻不同地点的加速度是不同的，由(5.1.15)式

$$a(x',t=0)=a_l(x')=\frac{a_0}{1+a_0x'/c^2}$$

这样如果我们改变 S 系、S' 系的原点（由前面的讨论知道，改变两个坐标系的原点是容许的），就相当于改变了 a_0 的数值。这样我们最后发现，实际上只有**两个**内禀刚性匀变速直线运动的加速系：一个向左运动，一个向右运动。

还可以用下面的坐标代换讨论这个问题。令

$$X=\frac{a_0x}{c^2},T=\frac{a_0t}{c},X'=\frac{a_0x'}{c^2},T'=\frac{a_0t'}{c}$$

则(5.1.27)和(5.1.28)式可以归一化为

$$\left.\begin{aligned}&(1+X')^2=(1+X)^2-T^2\\&T'=\frac{1}{2}[\ln(1+X+T)-\ln(1+X-T)]\end{aligned}\right\}\qquad(5.2.1)$$

$$\left.\begin{aligned}&X=(1+X')\text{ch}T'-1\\&T=(1+X')\text{sh}T'\end{aligned}\right\}\qquad(5.2.2)$$

相应的速度、加速度的表达式为

$$v = \frac{cT}{1 + X} = \frac{cT}{\sqrt{(1 + X')^2 + T^2}} \tag{5.2.3}$$

$$a = \frac{(1 + X')^2}{(1 + X)^3} a_0 \tag{5.2.4}$$

$$a_I = \frac{a_0}{1 + X'} \tag{5.2.5}$$

5.2.3 引力场 S' 系

按广义相对论的处理方法，加速系等效为引力场。下面讨论引力场的几个问题。

1. 时空间隔

前面得到了 $g_{00}(x') = \left(1 + \frac{a_0 x'}{c^2}\right)^2$，以及取 $\mathrm{d}x'$ 为固有长度，所以时空间隔为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= c^2 \mathrm{d}t^2 - (\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2) \\ &= c^2 \left(1 + \frac{a_0 x'}{c^2}\right)^2 \mathrm{d}t'^2 - (\mathrm{d}x'^2 + \mathrm{d}y'^2 + \mathrm{d}z'^2) \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

S' 系的度规为

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} (1 + a_0 x'/c^2)^2 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} \tag{5.2.7}$$

2. 空间是平坦的

在广义相对论中，空间的弯曲由曲率张量来表示。由 S' 系的度规可以计算空间的曲率，计算结果表明，空间的曲率张量为零，这说明，空间虽然存在等效的引力场，但是仍然是平坦的，表明空间的弯曲实质上是由物质及其运动所决定。我们假设 S 系是个宏观惯性系，就是假设此范围内没有引力、也就是没有产生引力的物质，因此 S 系所在的空间是平坦的。

这是空间的内在本质的属性，不会由于坐标变换而改变。张量有个性质：若张量在某坐标系中各分量都是零，则变换到任意坐标系中各分量仍然为零。这正体现了空间的平坦性不被坐标变换所改变的重要性质。

3、固有时和固有长度

时空间隔表达式(5.2.6)式中，dx'^2 项的系数为 1，似乎 S' 系的长度不受引力的影响，各处都相同，这是误解。因为我们所选的坐标系中，dx' 本身就是固有长度，在引力场中要受到引力的影响，不能作为引力场的统一的长度标准，无法用其前面的系数直接比较各地的固有长度。

为了比较 S' 系中各地的固有时和固有长度，我们仍然采用 3.2 节中的方法，用引力场中自由下落的惯性系的时钟和尺子作为不受引力场影响的测量标准。取 S 系原点 O 处的时钟和尺子作为测量时间和长度的标准，测量值分别记为 dt_0 和 dx_0。$t=t'=0$ 时刻 O 点与 S' 系原点 O' 重合，然后开始自由下落。由于 $t=t'=0$ 时刻 O、O' 相对静止，所以它们的时间、长度相同，即

$$dt_0=d\tau'(x'=0),\quad dx_0=dx'(x'=0)$$

设 O 点运动到 S' 系 x' 处时速度为 v。由(5.1.20)式，注意对 O 点 $x=0$

$$v=a_0t \tag{5.2.8}$$

用 O 处时钟校准 x' 处固有时钟，则 x' 处的固有时间隔 $d\tau'$ 与 dt_0 的关系为

$$d\tau'=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dt_0=\sqrt{1-\left(\frac{a_0t}{c}\right)^2}dt_0$$

再由(5.1.27)式

$$1-\left(\frac{a_0t}{c}\right)^2=\left(1+\frac{a_0x'}{c^2}\right)^2$$

得到

$$d\tau'=\left(1+\frac{a_0x'}{c^2}\right)dt_0=\sqrt{g_{00}}dt_0 \qquad (5.2.9)$$

对比(5.1.21)式

$$dt_0=dt'$$

因此 S' 系的坐标时 dt' 是全坐标系统一的，不受引力影响，也相当于是 $x'=0$ 处的固有时。

按(5.2.9)式，对同样的时间间隔 dt'，$\frac{a_0x'}{c^2}$ 越小即 a_I 越大的地方，$d\tau'$ 越小，固有钟走得越慢。

类似地，用 S 系原点处尺子测 S' 系 x' 处 x 方向的长度 dx_0，与用 S' 系尺子测量的结果 dx' 的关系为

$$dx'=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}dx_0=\left(1+\frac{a_0x'}{c^2}\right)^{-1}dx_0 \quad (5.2.10)$$

按(5.2.10)式，对同样的长度 dx_0，$\frac{a_0x'}{c^2}$ 越小即 a_I 越大的地方，固有长度 dx' 越大，该处的固有尺越短。

因此，如果引力场随时间变化，则各处的固有长度也随时间变化。虽然 S' 系内的测量者用当地的标准尺测量感觉不到这种变化(标准尺和长度同样地受引力的影响)，仍然认为自己所处的 S' 系是刚性的参考系(此时符合 Moller 对刚性参考系的定义：若两点之间的距离用静止在参考系中的标准测量棒测量为与时间无关的常数，则称该参考系统为刚性的)。但是如果严格要求参考系的固有长度不随时间变化的情况才是内禀刚性参考系(这样可能更合理)，那么这种严格的内禀刚性参考系只有上述的匀加速内禀刚性参考系 S' 系。

4. 引力场场强

按广义相对论的定义，这里的静场的引力场的场强应作为引力势的负梯度。

引力势为(可参看 4.1.1)

$$\phi=c^2(g_{00}-1)/2 \tag{5.2.11}$$

将 g_{00} 代入得 S' 系的引力势.

$$\phi=a_0x'\left(1+\frac{a_0x'}{2c^2}\right) \tag{5.2.12}$$

于是 S' 系的场强 $\boldsymbol{g}$ 为

$$\boldsymbol{g}=-\nabla\phi=-\frac{\partial}{\partial x'}\phi\hat{x}=-a_0\left(1+\frac{a_0}{c^2}x'\right)\hat{x} \tag{5.2.13}$$

5.3 双生子问题

相对论指出：运动的时钟变慢，引力场中的时钟也变慢，前者是一种测量结果，而后者是实质上的结果。运动、引力与时钟快慢的关系是相对论有别于经典理论的重要效应。问题提得最尖锐、最突出的是双生子问题，即双生子甲、乙同处于惯性系中，甲不动，乙去太空遨游一番回来与甲重逢，甲、乙究竟谁年轻？这是相对论必须回答的问题，而且由相对性原理，要分别站在甲、乙的立场上回答，结果也必须相同。

5.3.1 狭义相对论的讨论

爱因斯坦在 1905 年首次阐明，若乙以 $v=0.8c$ 的速度飞向 8 光年远的天体，到达后立刻以原速 v 返回与甲重逢，这期间甲过了 20 年，乙过了 12 年，乙比甲年轻了 8 岁。1918 年爱因斯坦写文以问答的方式说明双生子问题的关键是乙在往返过程中必须有加速阶段的作用。1939 年和 1957～1959 年期间对双生子问题都有一番争论。

爱因斯坦举的例子是一种极端情况，可以在狭义相对论内讨论。现有的一些大学物理教材中也涉及双生子问题，处理的方法都是采用的爱因斯坦的极端情况。我们也采用这种方法在狭义相对论的范畴内讨论上述的双生子问题。

设甲静止在惯性系 S 系，乙前往天体时为惯性系 S' 系，返回时为惯性系 S'' 系。相对 S 系，S' 和 S'' 系的速率都是 $v=0.8c$，$\gamma=(1-v^2/c^2)^{-1/2}=5/3$。

1. 甲的立场

甲的立场，指甲作为观察者讨论问题，他自己和地球、天体都保持不动，乙去而复回。

在 S 系讨论，距离 $\Delta x=0.8\ \mathrm{l.y}$（l.y 指光年），$v=0.8c$，所以单程时间为

$$\Delta t_1=\frac{\Delta x}{v}=10\ \mathrm{y}$$

于是，在 S 系测量乙往返所用时间 $\Delta t=2\Delta t_1=20\ \mathrm{y}$，因此在乙往返期间，甲度过了 20 年。

乙测量的时间可以用洛伦兹变换讨论。S' 系用同一个时钟计时，因此时间间隔 $\Delta t_1'$ 是原时，S 系的时间间隔 Δt_1 为非原时。所以

$$\Delta t_1'=\frac{\Delta t_1}{\gamma}=6\ \mathrm{y}$$

S'' 系的情况与之类似。于是，在 S' 系和 S'' 系测量乙往返所用总的时间（也就是用乙所携带的时钟测量的时间）$\Delta t'=2\Delta t_1'=12\ \mathrm{y}$，因此在乙往返期间，乙度过了 12 年。

总结上述结果：在惯性系中，若乙直线匀速往返，往返速度皆为 v，忽略乙换参考系（由 v 换成 $-v$）的时间，单程乙计时为 $\Delta t_1'$，往返过程乙计时为 $\Delta t'$，则单程甲计时为

$$\Delta t_1 = \gamma \Delta t_1' = \frac{\Delta t_1'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{5.3.1}$$

往返过程甲计时为

$$\Delta t = 2\Delta t_1 = \gamma \Delta t' = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{5.3.2}$$

2. 乙的立场

从乙的角度讨论问题，认为乙自己不动，甲和地球、天体保持相对静止，一起反方向以 v 运动，先是地球飞走天体飞来，然后天体再飞走地球又飞回，见图 5.3.1 和图 5.3.2。

乙先处于 S' 系，在 S' 系观察，天体以 $v=0.8c$ 飞来，飞行距离 $\Delta x'$ 为动长，S 系中距离 Δx 为静长．于是 $\Delta x' = \Delta x/\gamma$，所用时间为

$$\Delta t_1' = \frac{\Delta x'}{v} = \frac{\Delta x}{\gamma v} = \frac{\Delta t}{\gamma} = 6 \text{ y}$$

然后乙换到 S''系。在 S''系观察，地球以 $v=0.8c$ 飞来，飞行距离 $\Delta x''=\Delta x'$，所用时间 $\Delta t_2''=\Delta t_1'$。于是用乙所携带的时钟测量的总时间为 $\Delta t' = 2\Delta t_1' = 12$ y，此结果与甲立场讨论的结果相同。

从 S' 系分析 S 系的时钟。在 S' 系同时的两事件，在 S 系不同时。天体在 S' 系的坐标比地球的坐标大，$\Delta x' = \Delta x/\gamma$，由洛伦兹坐标变换(1.2.8)式，在 S' 系的同一时刻，天体与地球的时间差

$$t_{天} - t_{地} = \gamma v \frac{\Delta x'}{c^2} = v \frac{\Delta x}{c^2} = 6.4 \text{ y}$$

设地球离开时 $t=t'=0$，则该时刻天体上的时钟应为 6.4 年，见图 5.3.1 的上图。

上面得到，天体飞来过程中，S'系测量时间为 $\Delta t_1' = 6$ y。

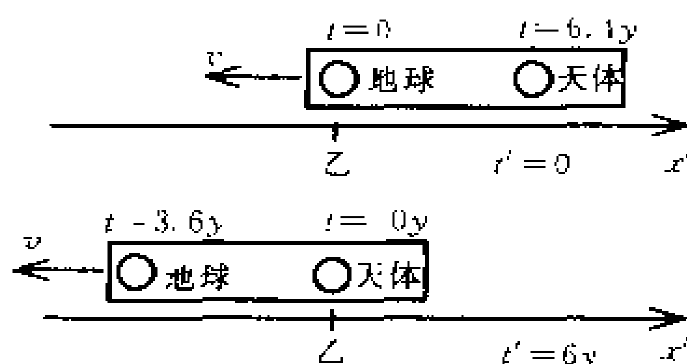


图 5.3.1　S'系观察地球离开天体到达乙处

在地球上用同一个时钟测量此过程的时间 Δt_1 是原时，相应的 $\Delta t_1'$ 为非原时，于是

$$\Delta t_1 = \Delta t_1'/\gamma = 3.6\ \mathrm{y}$$

这样，当天体到达乙处时，乙的时钟读数为 $t'=6$ 年，地球上时钟读数为 3.6 年，天体上时钟读数为 10 年，见图 5.3.1 的下图。

然后乙瞬时换到 S''系，同时带上了自己的时钟——读数为 6 年，因此很自然地取 S''系的时间与乙的时钟相同，即取 $t''=t'=6$ y。此刻乙的位置就在天体处，所以天体的时钟读数也不改变，即天体时钟的读数仍为 10 年。但在 S''系观察，地球和天体的运动方向相反，地球上时钟比天体上的时钟超前，即

$$t_{地} - t_{天} = v\Delta x/c^2 = 6.4\ \mathrm{y}$$

于是，在乙换到 S''系时刻，地球的时钟的读数跳到 16.4 年，见图 5.3.2 的上图。(如果还要用洛伦兹坐标变换来计算地球与天体的时间差，应该用(1.2.7)式，因为天体运动方向的改变，造成 S 系 S''系的地位颠倒)。由对称性，地球飞回的时间仍需要 3.6 年，这样，当地球到达乙处，甲、乙重逢时，地球的时钟(即甲的时钟)读数为 20 年。见图 5.3.2 的下图。

于是从甲、乙的立场分析，所得结果相同，这也正是相对

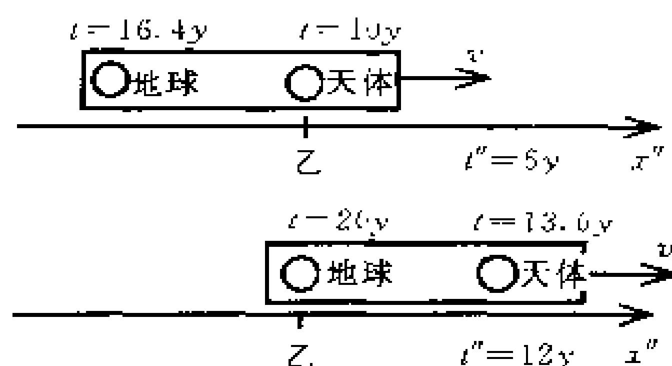


图 5.3.2　S''系观察天体离开地球问到乙处

论原理的要求。

当乙从 S' 系换到 S''系时，实际上相当于经历一个加速度为无限大的过程，是一种极端的、理想化的情况。地球上时钟的读数的突变，实质上是由乙的时钟在引力场中变慢的效应引起。这些物理本质在这种方法中体现不出来，成为这种方法的主要缺陷。此外，加速度为无限大的过程能否实现？加速度为无限大的过程会引起什么物理效应？对时钟的影响如何？都是这个方法引起的和应该回答的问题。所以虽然这个方法自洽，但是很牵强。

最后要说明的是，双生子问题中，如果两人不是在惯性系里而是处于引力场中，甲保持不动，乙出去遨游一番回来与甲重逢，甲、乙谁年轻就说不准了，与乙的历程有关。

5.3.2　利用内禀刚性加速系讨论——甲的立场

利用内禀刚性加速系，可以"光滑"地连接速度不同的惯性系，不再出现"瞬时跳跃"、加速度无限大，也不会出现时间的突变，因此对双生子问题是严格的讨论。

甲留在惯性系 S 系中，乙作为具有内禀刚性的参考系 S' 系的原点，作加速、匀速、减速运动离开甲到达某处，然后再加速、匀速、减速回来与甲重逢。也分别从甲、乙的立场即分别在

S、S'系讨论。

这里先从甲的立场讨论。

甲留在 S 系原点 O 处不动，乙从 O 点出发，加速到 A，速度达到 v_0，然后以 v_0 匀速运动到 B，再减速到 C（在 C 点速率为零）；从 C 出发，反向加速到 B，然后以 v_0 匀速运动到 A，再减速到 O（在 O 点速率为零）。其中乙在加速或减速时，作为内禀刚性非惯性系原点的初始加速度或固有加速度大小都是 $a_0(a_0>0)$。由前面的符号规定，从 B 到 C 和从 C 到 B，非惯性系原点的初始加速度取为 $-a_0$ 是因为加速度方向与 x 轴正方向相反。从 B 到 A 速度取为 $-v_0$ 是因为速度方向与 x 轴正方向相反，见图 5.3.3。

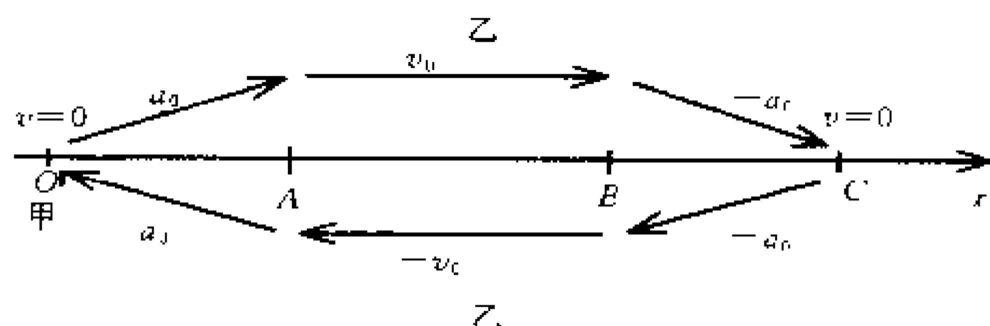


图 5.3.3　在 S 系观察乙的运动

1. S 系的计时 t

由对称性，有

$$t_{OA}=t_{BC}=t_{CB}=t_{AO},\quad t_{AB}=t_{BA}$$

其中 t_{OA}表示乙在 $O\to A$ 过程中 S 系计时的时间，t_{AO}表示乙在 $A\to O$ 过程中 S 系计时的时间，……

乙位于S'系的原点，在$O\to A$ 过程中速度从 0 增加到 v_0，在(5.1.20)式中取 $x'=0$ 得

$$v_0 = \frac{a_0 t_{OA}}{\sqrt{1+(a_0 t_{OA}/c)^2}}$$

从中解出

$$t_{OA} = \frac{v_0}{a_0\sqrt{1-v_0^2/c^2}}$$

$A \to B$ 过程中乙匀速运动，乙所在坐标系为惯性系，乙测量的时间 t_{AB}' 为原时。由前面狭义相对论的结果，S 系计时为

$$t_{AB} = \gamma t_{AB}' = \frac{t_{AB}'}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}$$

于是在整个过程中 S 系的计时为

$$t = 4t_{OA} + 2t_{AB} = \frac{2}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}\left(\frac{2v_0}{a_0} + t_{AB}'\right) \quad (5.3.3)$$

2. 乙的计时 τ'

由于乙在加速运动时为非惯性系，要区分坐标时 t' 和固有时 τ'。但是乙位于 S' 系的原点，由(5.1.25)式，内禀刚性加速系原点处 $g_{00}(0)=1$，因此对乙来说

$$\tau' = \sqrt{g_{00}(0)}\,t' = t' \quad (5.3.4)$$

由(5.1.27)式

$$t_{OA}' = t_A' = \frac{c}{2a_0}\ln\frac{1-a_0x_A/c^2+a_0t_A/c}{1+a_0x_A/c^2-a_0t_A/c}$$

由(5.1.20)式 $a_0t_A = v_0(1+a_0x_A/c^2)$，代入上式得

$$t_{OA}' = t_A' = \frac{c}{2a_0}\ln\frac{1+v_0/c}{1-v_0/c} \quad (5.3.5)$$

因为 $0 \leqslant v_0 < c$，从数学上上可以证明 $\frac{c}{2a_0}\ln\frac{1+v_0/c}{1-v_0/c} \leqslant$

$\dfrac{v_0}{a_0\sqrt{1-v_0^2/c^2}}$，即

$$\tau_{OA}'=t_{OA}'<t_{OA} \tag{5.3.6}$$

于是由对称性，整个过程中乙的计时为

$$\tau'=\tau'=4t_{OA}'+2t_{AB}'-\frac{2c}{a_0}\ln\frac{1+v_0/c}{1-v_0/c}+2t_{AB}' \tag{5.3.7}$$

显然

$$\tau'-t'<t$$

3. 总结和说明

计算的结果(5.3.3)和(5.3.7)式是严格的。这就严格证明了乙比甲年轻。

在(5.3.3)式和(5.3.7)式中，令 $a_0\to\infty$ 得

$$\tau'=t'\to 2t_{AB}',\quad t\to\frac{2t_{AB}'}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}=\frac{t'}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}$$

这就是(5.3.2)式，也就是狭义相对论的结果。由此可知，从甲的立场分析狭义相对论讨论结果作为严格结果的极限情况是正确的。

站在甲的立场，乙离开后又回来，在整个过程中都是用一个时钟记时，因此乙的时间间隔总是原时。而在乙的各个运动阶段，是用 S 系的多个时钟测量的，因此是非原时。所以在甲的立场，乙钟记时的减少时是由于相对论的运动效应。S 系是惯性系，在甲看来系中的时钟都是同步的，所以按甲的看法，用 S 系不同地点的时钟的记时，就相当于用甲所在地时钟的记时，即他认为 S 系的测量结果也就是他的测量结果。

实际上，在惯性系 S 系中（甲的立场），讨论乙运动过程中甲、乙钟的记时可以完全不用 S 系、S'系之间的坐标变换关

系式(5.1.27)式和(5.1.28)式。下面,就用狭义相对论的运动规律讨论。

在 S 系(惯性系)看,乙从 O 到 A 的加速过程是在恒力 $F=m_0a_0$ 的作用下进行的。由狭义相对论的动量定理:力的冲量等于质点的动量的增量

$$Ft=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}v=m_0a_0t$$

于是得

$$t=\frac{v}{a_0\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{5.3.8}$$

到达 A 点时乙的速度为 v_0,则由(5.3.8)式得 $t_{OA}=t_A=\dfrac{v_0}{a_0\sqrt{1-v_0^2/c^2}}$。再考虑匀速运动时的运动时钟变慢就得到(5.3.3)式。

要计算乙钟的记时,需要利用加速度对时钟没有影响的假设以及乙的记时始终是原时的条件,即利用(5.1.4)式 $\left(\dfrac{\partial\tau'}{\partial t}\right)_{x'}=\sqrt{1-v^2/c^2}$,于是乙的记时为

$$\Delta\tau'=\tau_{OA}'=\int_0^{t_A}\sqrt{1-v^2/c^2}\mathrm{d}t \tag{5.3.9}$$

对(5.3.8)式两边微分求出

$$\mathrm{d}t=(1-v^2/c^2)^{-3/2}\mathrm{d}v/a_0$$

代入上式得

$$\tau_{OA}'=\frac{1}{a_0}\int_0^{v_0}\frac{\mathrm{d}v}{1-v^2/c^2}=\frac{c}{2a_0}\ln\frac{1+v_0/c}{1-v_0/c}$$

这就是(5.3.5)式。而且由于 $\sqrt{1-v^2/c^2}<1$,所以从(5.3.9)式可以直接得到

$$\Delta\tau' < \int_0^{t_A} \mathrm{d}t = t_A = t_{OA} \quad 即 \quad \tau_{OA}' < t_{OA}$$

因此不需要讨论数学的证明了。

即使站在甲的立场讨论，也超出了狭义相对论的范畴。严格地讲，狭义相对论只能处理惯性系之间的时空变换，而在整个过程中乙有四次加速阶段，必须考虑加速度对时间、长度的影响，要应用爱因斯坦的有关假设，这就超出了狭义相对论的范畴。

按爱因斯坦假设，加速度不影响时钟，所以从甲的立场分析，乙的年轻是运动效应。

5.3.3 利用内禀刚性加速系讨论——乙的立场

1. S'系记录的固有时

站在乙的立场，乙静止在O'点；甲在S系的原点O点。$t'=t=0$时刻S'系加上$+\hat{x}$方向的外力成为引力场（场强方向为$-\hat{x}$），甲和S系开始在$-\hat{x}$方向的引力场中"自由降落"，直到A点来到乙处，此刻为t_A'，而甲到达A'时其速度为v_0（此时A点相对乙的速度为v_0。后面将证明，在S'系的同一时刻t'观测S系中各点的速度相同，因此甲的速度也是v_0）。从此刻起S'系去掉外力，引力消失，甲匀速运动，直到B点到达乙处，此刻为t_B'，而甲到达B'处。然后S'系加上反方向的外力，成为引力场（场强方向为$+\hat{x}$），甲和S系在$+\hat{x}$方向的引力场中自由运动，先是减速运动直到C点到达乙处，此刻为t_C'，甲到达C'点，整个S系瞬时速率为零；再反向加速运动，B点回到乙处，由对称性甲恰好回到B'，速率为v_0。从此刻起S'系去掉外力，引力消失，甲匀速运动，直到A点到达乙处，甲恰好回到A'点。然后S'系加上$+\hat{x}$方向的外力，成为引力场（场强方向为$-\hat{x}$），甲和S系在$-\hat{x}$方向的引力场中减速，直到O

点到达乙处甲、乙重逢，此刻整个 S 系瞬时速率为零。在引力场出现时，对乙所施加的外力大小都相同，乙的固有加速度的大小都取为 $a_0(>0)$。按上述符号规定，各个阶段的加速度和速度的符号如图 5.3.4。

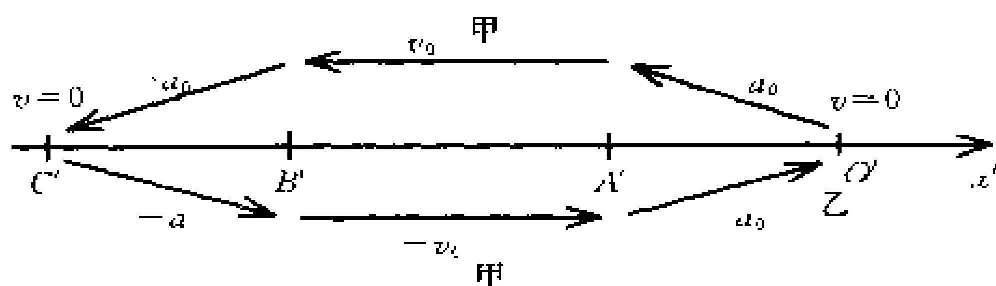


图 5.3.4　在 S' 系观察甲的运动

在 S' 系测量 S 系速率从零增加到 v_0 或从 v_0 减少到零所需的坐标时是完全确定的。由(5.1.20)式

$$a_0 t_A' = v_0 \left(1+\frac{a_0 x}{c^2}\right)$$

代入(5.1.27)式得

$$t_A' = t_{OA}' = \frac{c}{2a_0}\ln\frac{1+v_0/c}{1-v_0/c}$$

这正是(5.3.5)式。

两段匀速过程的时间也不改变，与甲立场相同，因此按乙的观点，乙记录的时间与甲立场中乙的记时是相同的，即(5.3.7)式所示

$$\tau' = t' = 4t_{OA}' + 2t_{AB}' = \frac{2c}{a_0}\ln\frac{1+v_0/c}{1-v_0/c} + 2t_{AB}'$$

下面讨论甲记录的时间。

2. 甲记录的时间

由对称性

$$t_{OA'} = t_{A'O}, \quad t_{A'B'} = t_{B'A'}, \quad t_{B'C'} = t_{C'B'}$$

其中 $t_{O'A'}$ 表示甲 $O'\to A'$ 过程中甲记录的时间，其他类似。

(1) $O'\to A'$ 阶段

注意甲位于 S 系的原点即 $x=0$ 处，在(5.1.20)式中取 $x=0$，得 $v_0=a_0t_{A'}$，于是

$$t_{O'A'}=t_{A'}=\frac{v_0}{a_0} \tag{5.3.10}$$

由(5.1.27)式，取 $x=0$，得 $\left(1+\frac{a_0x_{A'}'}{c^2}\right)^2=1-\left(\frac{a_0t_{A'}}{c}\right)^2$。将 $a_0t_{A'}=v_0$ 代入得

$$x_{A'}'=-\frac{c^2}{a_0}\left(1-\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}\right) \tag{5.3.11}$$

由于 A' 在 O' 的左方，$x_{A'}'<0$，所以上式在开平方时取负号。

(2) $A'\to B'$ 阶段

在此阶段为匀速过程，乙所在的坐标系也是惯性系。甲用同一只时钟测量时间，故甲测量的时间 $t_{A'B'}$ 为原时，在 S' 系测量的时间 t_{AB}' 为非原时，则

$$t_{A'B'}=\sqrt{1-v_0^2/c^2}\,t_{AB}' \tag{5.3.12}$$

(3) $B'\to C'$ 阶段

当甲到达 C' 时甲瞬时静止。因此若 S 系仍取甲作为坐标系原点，则当 S、S' 系相对静止时，两系的原点不重合，不能满足前面推导坐标变换等关系式所需的初始条件(S、S' 系相对静止时两系原点重合)，也就是说上述的关系式不再适用。为此，在此阶段和下一阶段($C'\to B'$ 阶段)要改变 S 系的坐标原点，取 S 系瞬时静止时(甲到达 C' 处)与乙重合处 C 点为 S 系的原点。

按符号规定，在此阶段，S' 系原点的初始加速度应为 $-a_0$，相应的关系式为

$$\left.\begin{aligned}&\left(1-\frac{a_0x'}{c^2}\right)^2=\left(1-\frac{a_0x}{c^2}\right)^2-\left(\frac{a_0t}{c}\right)^2\\&t'=\frac{c}{2a_0}\left[\ln\left(1-\frac{a_0x}{c^2}-\frac{a_0t}{c}\right)-\ln\left(1-\frac{a_0x}{c^2}+\frac{a_0t}{c}\right)\right]\end{aligned}\right\}\quad(5.3.13)$$

$$v=-\frac{a_0t}{1-a_0x/c^2}\quad(5.3.14)$$

由(5.3.14)式有 $v_0=-\dfrac{a_0t_{B'}}{1-a_0x_{B'}/c^2}$，即 $1-\dfrac{a_0x_{B'}}{c^2}=-\dfrac{a_0t_{B'}}{v_0}$，代入(5.3.13)式得

$$\left(1-\frac{a_0x_{B'}'}{c^2}\right)^2=(a_0t_{B'})^2\left(\frac{1}{v_0^2}-\frac{1}{c^2}\right)$$

于是得

$$a_0t_{B'}=-\frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}\left(1-\frac{a_0x_{B'}'}{c^2}\right)$$

(因为 $t_{B'}<0$，所以开平方式取负号)

$$\begin{aligned}x_{B'}'&=(x_{B'}'-x_{A'}')+x_{A'}'\\&=-v_0t_{A'B'}'+x_{A'}'\\&=-\left[v_0t_{AB'}'+\frac{c^2}{a_0}\left(1-\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}\right)\right]\end{aligned}$$

其中利用了(5.3.11)式。将 $x_{B'}'$ 代入上式得

$$t_{B'}=-\frac{v_0}{a_0\sqrt{1-v_0^2/c^2}}\left(2+\frac{a_0}{c^2}v_0t_{AB'}'-\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}\right)$$

由于 $t_C=0$，于是

$$\begin{aligned}t_{B'C}&=t_C-t_{B'}\\&=\frac{v_0}{a_0\sqrt{1-v_0^2/c^2}}\left(2+\frac{a_0}{c^2}v_0t_{AB'}'-\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}\right)\end{aligned}\quad(5.3.15)$$

这样甲计时的整个过程的总的时间为

$$t = 2(t_{OA'} + t_{A'B'} + t_{B'C})$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}\left(\frac{2v_0}{a_0} + t_{AB}'\right) \qquad (5.3.16)$$

3. 总结和说明

利用内禀刚性直线运动加速系可以严格讨论双生子问题，这种严格性既包括不采用无限大加速度，也包括可以分别站在甲、乙的立场上讨论不同立场的结果相同，满足了相对论原理的要求。

站在乙的立场上看，乙静止在引力场，甲在引力场做自由运动。甲构成局域惯性系。

分别从甲、乙的立场计算甲钟的计时，总的结果相同，但是每个阶段的结果不同：

$$t_{OA'} < t_{OA}, \quad t_{A'B'} < t_{AB}, \quad t_{B'C} > t_{BC}$$

这是引力使时钟变慢效应的体现。在 S' 系分析甲的记时，既有运动效应也有引力效应，类似 3.3 节中讨论的史瓦西场中运动标准钟的走时速率问题。

设甲运动到 S' 系的 $P(x')$ 处时，P 处观察者看甲的速度为 v。在此处甲运动一小段路程中甲的记时为 $\mathrm{d}t$，S' 系当地记时为 $\mathrm{d}\tau'(x')$，乙的记时为 $\mathrm{d}\tau'(0) = \mathrm{d}t'$。

相对 P 处当地的记时，甲的记时为原时（同一只钟测量），于是有

$$\mathrm{d}t = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\tau'(x') = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{g_{00}(x')}\,\mathrm{d}t'$$

$$= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{g_{00}(x')}\,\mathrm{d}\tau'(0)$$

所以乙的记时为

$$d\tau'(0)=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{g_{00}(x')}}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\cdot\frac{1}{1+a_0x'/c^2}dt \quad (5.3.17)$$

前一项因子$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$为运动效应，后一项因子$\frac{1}{1+a_0x'/c^2}$为引力效应。

(1) 对$O'A'$段，$a_0>0$，$x'<0$，$\frac{1}{1+a_0x'/c^2}>1$，引力效应和运动效应共同使乙的记时比甲的记时大。即 $\tau_{O'A'}'(0)=\tau_{OA}'(0)=t_{OA}'>t_{O'A'}$。

(2) 对$B'C'$段。$a_0<0$，$x'<0$，$\frac{1}{1+a_0x'/c^2}<1$，引力效应与运动效应作用相反。而且$|x'|$很大，使引力效应大大超过了运动效应，不但使乙的记时比甲的记时少($\tau_{B'C'}'(0)=\tau_{BC}'(0)=t_{BC}'<t_{B'C'}$)，而且补上了其他两段过程中乙的超时，使整个过程中乙的记时少于甲的记时。

由上面分析我们看到，从S'系的立场，甲的记时dt总是比他到达x'处的固有时$d\tau'(x')$小(运动效应)；在$B'C'$过程中，乙的固有时$d\tau'(0)$比x'处固有时$d\tau'(x')$小很多(引力效应)，综合起来乙的记时比甲的记时少。

再分析$a_0\to\infty$的极限情况。由(5.3.10)和(5.3.15)式有

$$t_{O'A'}=t_{A'O'}\xrightarrow{a_0\to\infty}0$$

$$t_{B'C'}=t_{C'B'}\xrightarrow{a_0\to\infty}\frac{v_c^2t_{AB}'}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}\neq0$$

可见，在乙的立场(在S'系讨论)时，突然变换参考系(相当于$a_0\to\infty$)甲和乙的时间差对$O'A'$和$A'O'$阶段可以忽略，

而对 $B'C'$ 和 $C'B'$ 阶段不能忽略。正是在这两个阶段突变过程产生的甲、乙的时间差造成乙比甲年轻。狭义相对论乙的立场的讨论中，当乙掉头时“发现”在新的惯性系中甲的年龄突然增大 12.8 岁，就是 $a_0\to\infty$ 的加速和减速过程造成的。狭义相对论乙的立场的解释，“跳”过加、减速过程只看结果，结果当然是正确的。但是这也同时“跳”过了造成年龄突变的物理本质，显然是不完整的。另外，在狭义相对论的解释中常常要说“忽略掉头的时间”，这句话如果理解为忽略掉头过程中乙钟记时的时差是对的，但如果理解为忽略掉头对甲、乙时钟记时的时差的影响则是完全错误的。

在 S 系观测，S' 系从 $t=t'=0$ 时刻同时开始加速，但是当乙的速率到达 v_0 而转为匀速运动时，S' 系的其他点并不和乙同时转为匀速运动，从加速到匀速的过程是逐点实现的。为简单起见，下面用归一化的关系式(5.2.1)～(5.2.5)式讨论。由(5.2.3)式

$$v=\frac{cT}{\sqrt{(1+X')^2+T^2}}$$

在同一时刻 T，S' 系内不同地点 X'（即不同的 x'）处速率不同，因此它们到达 v_0 的时刻各不相同。上式中取 $v=v_0$ 得到 X' 处到达 v_0 的时刻 T_0 为

$$T_0^2=(1+X')^2\frac{v_0^2}{c^2-v_0^2}$$

因此 X' 越大则 T_0 越大，也就是说 S' 系中左边的点先到达 v_0，一旦到达 v_0 就立刻转为匀速，即从左到右逐点实现匀速，其中乙恰在 $T_A=\frac{a_0}{c}t_A$ 时刻开始匀速运动。

在 S' 系观测，在同一时刻 T'，S 系中各点的速率是相同

的。由(5.2.3)式

$$1+X=cT/v$$

代入(5.2.1)式得

$$T'=\frac{1}{2}\ln\frac{cT/v+T}{cT/v-T}=\frac{1}{2}\ln\frac{c+v}{c-v}\quad 即\quad v=c\tanh T'$$

上式决定了 T' 与 v 的关系，此关系与 $x(X)$ 无关。因此在 S' 系同一时刻观测，S 系中各点的速率是相同的，整个 S 系也同时达到 v_0。

S' 系作为内禀刚性参考系，是整个参考系同时(S' 系的同一时刻)去掉外力成为惯性系转为匀速的，因此 S 系也必然应该在同时整个地达到 v_0，转为匀速运动。

第 6 章　爱因斯坦引力场方程和史瓦西外部解

爱因斯坦的引力几何理论来自等效原理和广义相对性原理。引力的几何理论包括两个方面，一个方面是由已知的弯曲时空度规讨论自由粒子的运动(前面第 4 章讨论的就是最简单也是最重要的史瓦西场中自由粒子的运动)以及引力对力学现象、电磁现象等物理过程的影响。这些影响可由等效原理和广义相对性原理确定，方法是：引力场内一点处的局惯系内为已知的没有引力影响的狭义相对论的物理规律，将其改造成广义协变的形式，把闵可夫斯基度规换成黎曼度规，就得到了引力场中相应的物理规律，从而确定引力场的影响。

另一个方面是由物质分布及其运动确定时空的性质，即确定时空的度规。爱因斯坦的引力场方程，就将物质分布及其运动与时空的性质即时空的度规联系起来，与经典力学相比较，这部分内容相当于牛顿的万有引力定律。

爱因斯坦场方程是广义相对论的核心内容，它的建立、求解和解的讨论极大地促进了空间物理、天体物理和宇宙学的发展。

6.1　爱因斯坦引力场方程和史瓦西外部解

6.1.1　爱因斯坦场方程

爱因斯坦场方程是关于物质分布及运动与空间度规关系

的微分方程，由爱因斯坦引力理论的方法和思路，可以合理、简明、直截了当地确定场方程，这也是爱因斯坦引力理论成功的一个方面。爱因斯坦花了几年的时间，利用微分几何、张量分析等数学工具，建立起引力场方程。我们不涉及复杂的数学，只是简单地介绍引出爱因斯坦场方程的思路。

为满足广义相对性原理，场方程中所有物理量都应该表达为张量的形式。简单、通俗地说，张量是一类具有某些共同性质的量，标量是零阶张量，矢量是一阶张量，前面提到的空间的度规是二阶张量。建立坐标系后张量可以表示为在该坐标系里各个分量的集合，改换坐标系则张量的分量也要随之改变，张量的性质就体现在它的分量随坐标系变化的规律上，例如标量就是坐标变换不变量，矢量各个分量的变化规律与坐标的微分的变化规律相同……，一般来说，张量的最基本性质就是张量的分量在任意坐标变换下的变化规律与坐标微分的变换相符，称之为张量在坐标变换下协变。因此场方程应为张量方程，其中的物理量都应该是张量。此外，普通微分应改成协变微分。在弯曲的黎曼空间，张量的协变微分仍为张量，而张量的普通微分就不具有这样的性质。这样由张量及其协变微分建立起来的张量方程就可以在坐标变换下保持不变，方程所代表的物理规律在任何参考系中都相同，从而满足广义相对性原理。

场方程的形式可以从牛顿引力场方程得到启发，因为在弱场静态分布下引力场方程应该近似为牛顿引力场方程。牛顿引力场方程是将引力场的引力势与物质密度联系起来。在4.1.1和5.2.3中已提到引力场的场强 $\boldsymbol{g}$ 和引力势 ϕ 。这里与熟知的静电场的场强 $\boldsymbol{E}$ 和电势 U 对比，引出牛顿的引力场方程。

点电荷 q 的场强为 $\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r}$。静电场场强与电势的关系为 $\boldsymbol{E}=-\nabla U$。由静电场的高斯定理 $\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=q/\varepsilon_0$ 得到 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho_e/\varepsilon_0$（$\rho_e$ 为电荷体密度），将电势代入就得到静电场的场方程

$$\nabla^2 U=-\rho_e/\varepsilon_0$$

类似地，定义引力场的场强

$$\boldsymbol{g}=\frac{\boldsymbol{F}}{m}$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 为质点 m 在引力场中所受的引力。于是由牛顿的万有引力定律，质点 M 的引力场强为

$$\boldsymbol{g}=-G\frac{M}{r^3}\boldsymbol{r}$$

引力场强与引力势 ϕ 的关系为

$$\boldsymbol{g}=-\nabla\phi \tag{6.1.1}$$

由此可知与静电场对比，对应关系为（ρ 为质量体密度）

$$-GM\leftrightarrow\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\qquad -G\rho\leftrightarrow\frac{\rho_e}{4\pi\varepsilon_0} \tag{6.1.2}$$

因此引力场也有相应的高斯定理和相应的引力场方程

$$\oint\boldsymbol{g}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-4\pi GM$$

$$\nabla^2\phi=4\pi G\rho \tag{6.1.3}$$

牛顿引力场方程是关于 ϕ 的二阶线性偏微分方程，从微分几何的测地线方程可以看出，度规在方程中起着类似牛顿引力势的作用，在弱场情况下有直接的简单关系（(4.1.3)式）

$$g_{00}=1+2\frac{\phi}{c^2}$$

所以广义相对论的引力场方程也应该是度规 $g_{\mu\nu}$ 的二阶微分

方程，对二阶微商应为线性，并与物质分布及其运动联系起来。这样方程的一边是代表物质分布及其运动的能量、动量张量 $T_{\mu\nu}$，另一边是由度规及其一、二阶协变微商(二阶微商为线性)构成的张量。由数学上的黎曼定理，满足这样条件的张量只有描述时空弯曲程度的曲率张量及其缩并，选择余地很小，再考虑物理上的能量守恒和动量守恒，几乎就完全确定了引力场方程的形式为

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \qquad (6.1.4)$$

其中 $R_{\mu\nu}$ 为时空的曲率张量又称为里奇(Ricci)张量，R 为曲率标量，是 $R_{\mu\nu}$ 的缩并，都是反映时空弯曲程度的张量。场方程表示，时空的弯曲由物质及其运动决定，在静态弱场情况下，(6.1.4)式可近似为牛顿引力场方程(6.1.3)式。

$g_{\mu\nu}$ 是 4×4 的对称矩阵，有10个独立变量，(6.1.4)式有相应的10个场方程，但其中只有6个方程独立，要得到确定解还需补充4个方程，叫做坐标条件。

(6.1.4)式是关于 $g_{\mu\nu}$ 的二阶非线性偏微分方程，不满足叠加原理，即物质各部分单独产生的引力场之和不等于物质总体产生的引力场，这是因为引力场具有能量，也是引力源，本身也产生引力场即所谓二次效应。这方面与牛顿的引力场方程和电磁场方程不同，后二者场方程都是线性的，满足叠加原理，场本身不会产生二次效应。由于非线性，(6.1.4)式的求解更加困难，只有少数的精确解，其中最简单、最常用、最基础的解是史瓦西外部解。

6.1.2 史瓦西外部解

1916年，史瓦西第一个求出爱因斯坦场方程在静态球对称情况下的精确解，称之为史瓦西(静态)外部解。爱因斯坦场

方程是关于时空几何结构的方程，解场方程，也就是由物质分布及其运动来求出时空的几何结构，即求出该时空的度规。

球对称分布、半径为 r_0 的静止质量体产生球对称的引力场，在史瓦西坐标 (ct,r,θ,φ) 下解引力场方程(6.1.4)就得到物质体外真空区域的史瓦西外部解为

$$g_{\mu\nu}=\begin{bmatrix}1-\dfrac{2GM}{c^2r} & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\left(1-\dfrac{2GM}{c^2r}\right)^{-1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -r^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta\end{bmatrix} \tag{6.1.5}$$

此即史瓦西场的度规。在第 3 章里，我们借助飞来的惯性系比较史瓦西场中各点的时间和长度，然后把牛顿理论下得到的 $v^2=2GM/r$ 关系推衍到史瓦西场，也得到了史瓦西场的度规(3.2.11)式。那只是一种说明而已。

相应的时空线元为

$$ds^2=c^2\left(1-2\frac{GM}{c^2r}\right)dt^2-\left(1-2\frac{GM}{c^2r}\right)^{-1}dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2) \tag{6.1.6}$$

史瓦西解适用于 $r>r_0$ 区域，因此称为外部解，其中 M 为物质总质量。史瓦西解与球体物质具体的质量分布无关，只要求其分布具有球对称性。反过来也就不能由外部解去了解球体物质的分布细节。

在史瓦西解的基础上可以有以下两点推广：

① 史瓦西外部解是球对称分布物质的真空部分解，所以可以推广到球壳引力源，在其内部的球形空腔里是真空，内部

物质质量为零(相当于 $M=0$),因此空腔内史瓦西解蜕化为闵可夫斯基时空,即引力为零的平坦时空.球壳外部仍为标准的史瓦西解。

② 若引力源内有径向运动但随时保持球对称分布时,其外部区域仍为史瓦西外部解。

6.2 史瓦西外部解的简单讨论

6.2.1 史瓦西场的时空

1. 史瓦西场具有时间概念和有限真实距离概念

3.2 节利用无穷远处飞来局惯系的时间与长度标准审视了史瓦西场中引力对时空的作用,这里换个角度从史瓦西解和 3.4 节中相对论的普遍时空出发来讨论史瓦西场时空,同时也可确认前面对史瓦西场时空讨论的正确性。

因为 $g_{0i}=0(i=1,2,3)$ 及度规 $g_{\mu\nu}$ 与 t 无关,所以按3.4节的讨论,一方面对非紧邻点的坐标钟对表的话,对表结果与对表的路径无关,可以在整个史瓦西场中统一坐标钟,建立异地事件的同时性概念 —— 同时事件就是坐标时相等的事件;另一方面在统一的坐标时的基础上可以对 $\mathrm{d}\sigma$ 积分求出任意的非紧邻二点之间的真实距离。

2. 无限远处为闵可夫斯基时空

当 $r\to\infty$ 时,$g_{00}\to 1$,$g_{11}\to -1$,此时

$$\mathrm{d}s^2=c^2\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}r^2-r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2) \quad (6.2.1)$$

这正是闵可夫斯基空间的线元表达式,度规成为闵可夫斯基空间的度规,因此距 M 无限远处黎曼空间近似为平直的闵可夫斯基空间,引力趋于零。

3. 引力对时间的影响

由固有时与坐标时普遍关系(3.4.1)及史瓦西解得到

$$d\tau(r) = \sqrt{g_{00}(r)}dt = \left(1 - 2\frac{GM}{c^2 r}\right)^{\frac{1}{2}}dt \quad (6.2.2)$$

由此知 $d\tau(\infty) = dt$，即坐标钟相当于无限远处的时钟，如果用 r 处时钟测 ∞ 处固有时 $d\tau(\infty)$，结果为

$$d\tau(r) = \left(1 - 2\frac{GM}{c^2 r}\right)^{\frac{1}{2}}d\tau(\infty) < d\tau(\infty)$$

即引力场中时钟比无限远处时钟走得慢，引力越强(r 越小)钟走得越慢。

4. 引力对长度的影响

由真实距离元与空间坐标元普遍关系(3.4.10)式及史瓦西解，得到史瓦西场中纯空间距离元为

$$\begin{aligned} d\sigma(r) &= \left[\sum_i (-g_{ii}dx_i^2)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\left(1 - 2\frac{GM}{c^2 r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \right. \\ &\quad \left. \sin^2\theta d\varphi^2)\right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

(1) 沿径向($d\theta = d\varphi = 0$)的真实距离元为

$$d\sigma_r(r) = \left(1 - 2\frac{GM}{c^2 r}\right)^{-\frac{1}{2}}dr \quad (6.2.4)$$

由此知 $d\sigma_r(\infty) = dr$，即径向坐标尺相当于无限远处尺，如果用 r 处径向尺测量 ∞ 处径向固有长度 $d\sigma_r(\infty)$，结果为

$$d\sigma_r(r) = \left(1 - 2\frac{GM}{c^2 r}\right)^{-\frac{1}{2}}d\sigma_r(\infty) > d\sigma_r(\infty)$$

说明 r 处径向放置的尺比无限远处标准尺短，引力越强径向尺收缩越显著。

(2) 横向($dr = 0$，$r =$ 常数的曲面上)的真实距离元为

$$d\sigma_{\perp}(r) = r(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)^{\frac{1}{2}}$$

$r=$ 常数的曲面称为史瓦西场坐标距离为 r 的球面。可见史瓦西场纯空间的横向真实距离元与欧几里得空间横向距离元(也是欧几里得空间的球面上距离元)相同。欧几里得空间的距离和尺度是不随地点改变的,因此横向真实长度及横向放置的尺都不随 r 改变而各处相同。在此意义上称 r 为常数的球面是欧几里德的,即该球面的几何性质为欧几里得几何的性质。例如坐标距离为 r 的球面上大圆周长为 $2\pi r$、球面面积为 $4\pi r^2$,史瓦西坐标中 θ、φ 具有欧几里得空间角坐标的几何意义。注意坐标 r 不代表该点到球心的真实距离,而是该点的坐标距离,常称之为"视在半径"、若已知(测量出)过该点的球面面积 A,则得到

$$r = \sqrt{\frac{A}{4\pi}}$$

这样由测量的球面面积可以计算出该点的视在半径。

6.2.2 史瓦西场中空间曲面的形象

(6.2.3)式为史瓦西场三维纯空间线元,与平直的欧几里得空间线元

$$d\sigma = [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]^{\frac{1}{2}}$$

相比较,径向长度伸长、横向长度不变,因此不再是平直的,而是代表弯曲的三维空间,其中二维曲面的弯曲可以在三维平直空间直观看到并描绘出来,称为该曲面在平直空间的形象。

在欧几里得空间,坐标都具有实际的几何意义,坐标长度就是实际长度,按曲面方程可以在坐标系中直接描绘出曲面。在广义相对论中坐标系可以任意选取,但一般不具有实际的几何或物理意义,只不过是用一组数(坐标)代表时空的一个点,即使选择比较合适的坐标系(如史瓦西坐标),由于坐标长

度一般不等于真实长度，也很难在坐标系中描绘出真实的曲面形状。因此一般用欧几里得空间中与史瓦西场曲面内在性质相同的曲面作为后者的直观形象。曲面的内在性质由其上的线元表达式决定(即由曲面度规决定)，例如 r 为常数的面上线元与欧几里得空间球面上线元相同，所以欧几里得空间球面就是史瓦西场中 r 为常数的面的形象。

史瓦西场中 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 的面上线元为

$$d\sigma^2=\left(1-2\frac{GM}{c^2r}\right)^{-1}dr^2+r^2d\varphi^2 \qquad (6.2.5)$$

而欧几里得空间中 $\theta=\pi/2$ 的面为 xy 平面，线元为

$$d\sigma^2=dr^2+r^2d\varphi^2$$

两个面上线元不同，说明欧几里得空间过 xy 的平面不是史瓦西场 $\theta=\pi/2$ 的面的形象。考虑对称性，史瓦西场中 $\theta=\pi/2$ 的面在欧几里得空间的形象应该是绕 z 轴的旋转曲面。为适合旋转曲面的特点，在欧几里得空间中取柱坐标系(r,φ,z)如图 6.2.1，在柱坐标系内，基本的坐标单位矢量为互相垂直的 $\hat{r}$、$\hat{\varphi}$、$\hat{z}$，欧几里得空间的线元的柱坐标表达式为

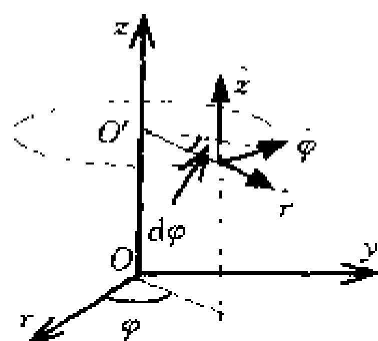


图 6.2.1

$$d\sigma^2=dr^2+r^2d\varphi^2+dz^2 \qquad (6.2.6)$$

在一般情况下，(6.2.6)式和(6.2.5)式代表的线元是不同的，但是在欧几里得空间的某个特殊的曲面上的线元可以与(6.2.5)式相同，我们就是要找到这个曲面。为此令(6.2.5)式与(6.2.6)式相等，得

$$dz=\left[\left(1-2\frac{GM}{c^2r}\right)^{-1}-1\right]^{\frac{1}{2}}dr$$

$$= \sqrt{\frac{2GM}{c^2}} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{r - 2GM/c^2}} \tag{6.2.7}$$

此式两边积分，取 $r = 2GM/c^2$ 时 $z = 0$，得到欧氏空间旋转抛物面

$$z^2 = 8\frac{GM}{c^2}\left(r - 2\frac{GM}{c^2}\right) \tag{6.2.8}$$

在这个曲面上的线元的表达式与(6.2.5)式相同，因此它就是史瓦西场 $\theta = \pi/2$ 面在欧几里得空间的形象，见图 6.2.2，其中(a)图为立体形象图。在(b)图中 r_0 为球体 M 的外半径，史瓦西场为 $r > r_0$ 区域；定义史瓦西半径或引力半径 r_g 为(具

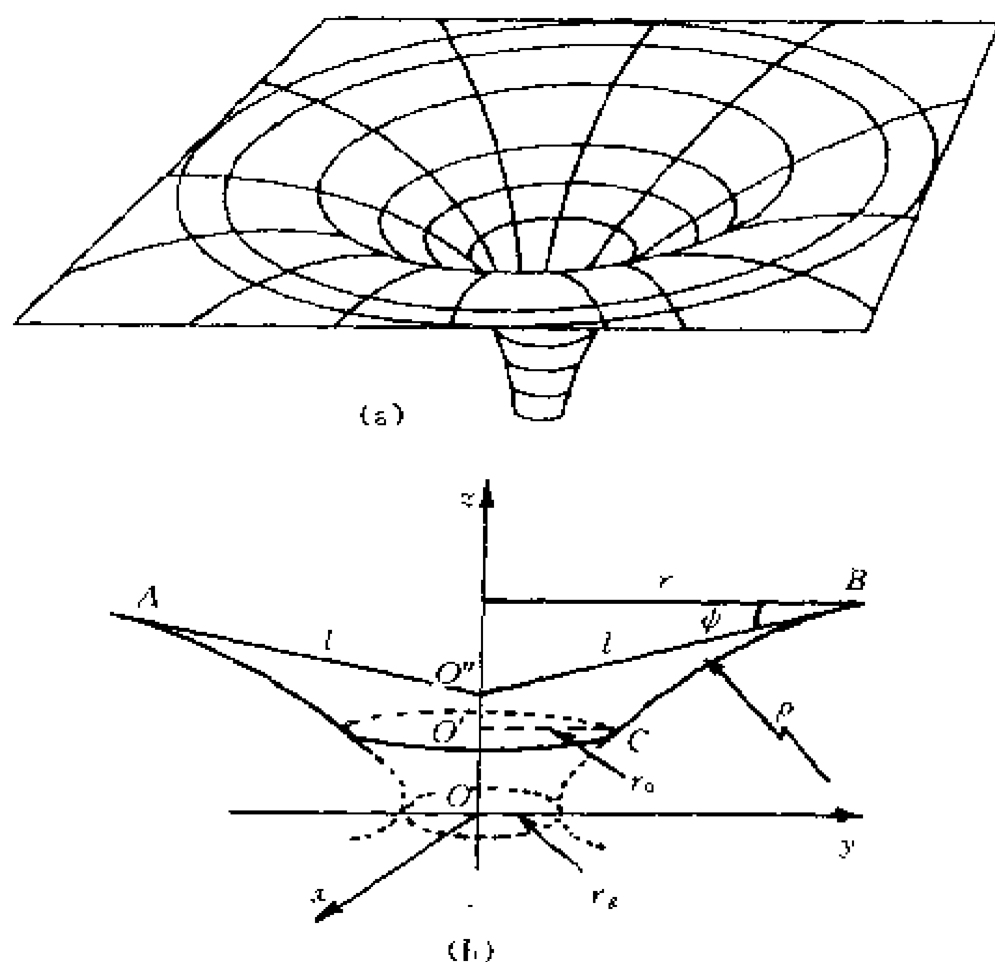


图 6.2.2

体意义见下节）

$$r_g = 2\frac{GM}{c^2} \tag{6.2.9}$$

注意r在欧几里得空间中是柱坐标参量，为点到z轴的距离，并非点到球体中心（坐标系原点）的距离。由此可直观地看到，在该面上以r为半径作圆，周长为$2\pi r$；该面上的径向曲线（旋转抛物面母线）上的距离元（即史瓦西场的径向真实长度）$d\sigma$显然大于坐标距离dr；在$r\to\infty$区域此面趋于xy平面。

有了这个形象，史瓦西场中$\theta=\frac{\pi}{2}$的面上曲线的曲率就可按旋转抛物面上相应曲线来计算。例如不失普遍性可以讨论旋转抛物面在$x=0$面上的截线——抛物线CB的曲率半径ρ。在$x=0$平面上，r即是y，(6.2.8)式可以写成

$$z^2 = 8\frac{GM}{c^2}\left(y - 2\frac{GM}{c^2}\right) \tag{6.2.10}$$

同样由(6.2.7)式可以得到抛物线CB的一阶导数

$$\frac{dz}{dy} = \sqrt{\frac{2GM}{c^2}}\left(y - 2\frac{GM}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = z'$$

于是其二阶导数为

$$\frac{d^2z}{dy^2} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2GM}{c^2}}\left(y - 2\frac{GM}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} = z''$$

则抛物线CB的曲率半径为

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{(1+z'^2)^{\frac{3}{2}}}{z''} \\ &= -2c\,\frac{(y-2GM/c^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2GM}}\left[1 + 2\frac{GM}{c^2}\left(y - 2\frac{GM}{c^2}\right)^{-1}\right]^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

将(6.2.10)式代入整理后，得到抛物线 CB 的曲率半径为

$$\rho = -cy\sqrt{\frac{2y}{GM}}$$

由于曲面是旋转抛物面，其母线的曲率与抛物线 CB 相同，为普遍考虑将 y 换成 r 就得到该面任意母线也就是史瓦西场 $\theta = \pi/2$ 面上的径向曲线在 r 处的曲率半径为

$$\rho = -cr\sqrt{\frac{2r}{GM}} \qquad (6.2.11)$$

由此式计算得到：在地球表面 $\rho = -3.43 \times 10^{11}\mathrm{m}$，在太阳表面 $\rho = -6.80 \times 10^{11}\mathrm{m}$。

从这些数据可以了解到，虽然引力场中时空是弯曲的，但是一般星体的引力场是很弱的，因此弯曲的曲率很小，与直线的偏离并不大，相对论效应也就很小了。

上述意义的曲率和曲率半径只能描述曲线的弯曲，对描述曲面的弯曲并不适宜，因为过曲面上一点的曲线有无穷多个，这些曲线都有各自的曲率和曲率半径，很难由它们来比较曲面的弯曲情况。因此通常用总曲率来反映曲面的弯曲程度。过曲面法线的平面与曲面交线叫法截线，过一点有无穷多的法截线通过，各有相应的曲率半径，将其中最大、最小值记为 ρ_1、ρ_2，定义曲面一点处的总曲率或高斯曲率

$$K = \frac{1}{\rho_1\rho_2} \qquad (6.2.12)$$

从史瓦西场中 $\theta = \pi/2$ 的面上线元表达式(即该二维空间的度规)(6.2.5)式以及微分几何关系式直接算出该面的总曲率为

$$K = -\frac{GM}{c^2r^3} \qquad (6.2.13)$$

注意总曲率的量纲为 m^{-2}。由此式计算出地球表面处 $\theta=\pi/2$ 的面的总曲率为 $K=-2\times10^{-23}m^{-2}$，太阳表面处 $\theta=\pi/2$ 的面的总曲率为 $K=-4\times10^{-24}m^{-2}$。

6.2.3 空间弯曲引起的的行星近日点的进动

有了史瓦西场 $\theta=\pi/2$ 面在欧几里得空间的形象，空间弯曲引起的的行星近日点的进动可以直接由这个形象面计算出来。

为简单起见，设行星在太阳引力场中以视在半径 r 做圆周运动，取所在面为 $\theta=\pi/2$ 面。在欧几里得空间看该面就是上面得到的旋转抛物面，在一级近似下把旋转抛物面近似为该面在行星所在处的切面 —— 切锥面，切锥面的顶点为 O''，锥面母线长为 l，与 xy 平面交角为 ψ，见图 6.2.2。因为 ψ 很小，所以 $\psi\approx \mathrm{tg}\psi=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}$。由(6.2.7)式并取一阶近似得

$$\psi\approx\sqrt{\frac{2GM}{c^2r}}$$

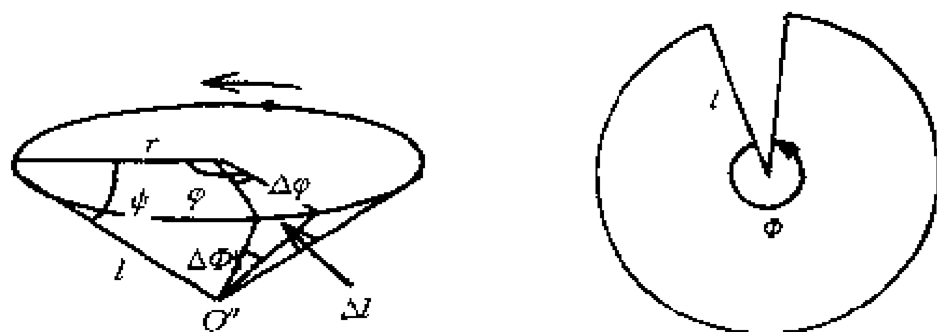


图 6.2.3

图 6.2.3 左图表示在欧氏空间看行星运动的切锥面，r、φ 分别是行星的坐标距离和角坐标，显然锥面上(即在行星运动的实际的弯曲面上)转角 $\Delta\Phi$ 小于其坐标转角 $\Delta\varphi$，弧长 Δl 是相同的，即 $r\Delta\varphi=\Delta l=l\Delta\Phi$，由此得到

$$\Delta\varphi = l\Delta\Phi / r = \Delta\Phi / \cos\psi$$

图 6.2.3 右图是将锥面沿母线剪开摊平，立刻看出，当坐标转角达 2π 形成完整锥面时，锥面上转角 $\Phi < 2\pi$。在锥面上真的转一圈转角 $\Phi = 2\pi$ 时，坐标转角 $\varphi > 2\pi$，即从坐标上看超前一个小角度，这就是空间弯曲引起的近日点进动。于是行星运行每周由于空间弯曲引起的近日点进动角为

$$\begin{aligned} d\varphi_2 &= \varphi - \Phi = \Phi\left(\frac{1}{\cos\psi} - 1\right) \\ &= 2\pi\left(\frac{1}{\cos\psi} - 1\right) \approx \pi\psi^2 \approx 2\pi\frac{GM}{c^2 r} \end{aligned}$$

其中 $\Phi = 2\pi$。利用余弦函数台劳展开式 $\cos\psi \approx 1 - \psi^2/2$，于是近似有：

$$\frac{1}{\cos\psi} \approx 1 + \frac{1}{2}\psi^2$$

与相对论效应引起的相对论总进动角（(4.2.14) 式）$d\varphi = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1 - e^2)}$ 比较，这里为圆周运动，所以 $a = r$，$e = 0$，因此相对论总进动角

$$d\varphi = 6\pi\frac{GM}{c^2 r} = 3d\varphi_2$$

即空间弯曲引起的进动角 $d\varphi_2$ 为总进动角 $d\varphi$ 的 1/3。

人们可能觉得空间弯曲引起行星的近日点的进动很神奇，其实我们在地球上也可以看到这种进动效应，这就是力学中著名的傅科(Foucault，1819 ～ 1868) 摆实验。1850 年傅科在巴黎的万神殿挂起一个摆长为 67 m 的长摆，目的是用摆平面的转动显示地球的自转。原来的北京天文馆的大厅中就挂着摆长很长的傅科摆，地上刻有角度，经过一段时间可以明显地看到摆尖划动的方位（即摆平面的方位）发生了转动。仔细

观察，发现傅科摆的转动周期不是 24 h，取决于摆所在处的纬度，北京大约在 40°N，傅科摆转一周大约需要 37 h。为什么傅科摆的周期与地球自转的周期不同？

惯性系中观察者甲分析傅科摆现象，认为摆平面在地平面上投影的方位是不变的，地球自转（忽略公转）使地球相对摆平面转动。甲看到的是三维图像，摆放置在球面上，地球的转动角为 $\Delta\varphi$，转一周后地球和傅科摆恢复原位，转角为 $\varphi = 2\pi$。

设乙为地球上傅科摆所在地的观察者，站在他的立场，他只生活在二维球面上，不了解周围的情况，认为地球不动，是傅科摆的摆平面在匀角速转动，傅科摆的转角 $\Delta\Phi$ 是摆平面相对他在地平面上所做的标记（地平面上的刻线）的转角。通过测量摆平面转一周（$\Phi = 2\pi$）所需的时间来确定傅科摆的转动周期和角速度。

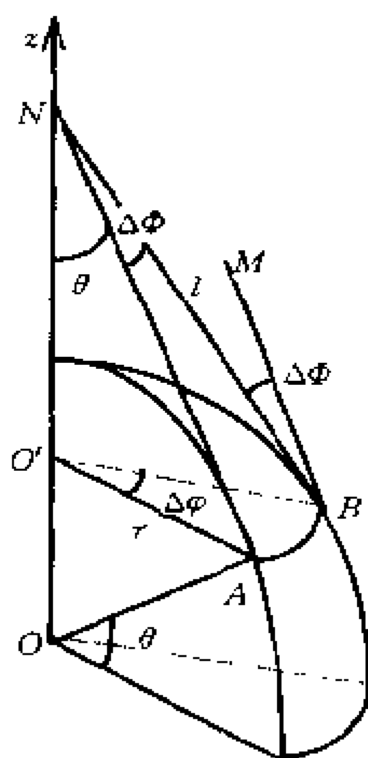


图 6.2.4

要分析 $\Delta\varphi$ 和 $\Delta\Phi$ 的关系，必须站在甲的立场。设某时刻 t_A 乙所在处的纬度为 θ，在某时刻 t_A 乙在空间 A 点，地平面上做的标记线为指向北极（z 轴）的切线 AN，并且此时摆平面的方位恰好也是 AN 方向。地球转过 $\Delta\varphi$ 后时刻为 t_B，乙转动到 B 处，见图 6.2.4。作 $BM \parallel AN$，由于摆平面方位不变，所以 t_B 时刻摆平面的方位为 BM。而此刻地平面上的标记线随地球转为 BN。这样乙在地平面上看到的转角 $\Delta\Phi$ 即为 $\angle NBM$。由几何关系

$$\angle NBM = \angle ANB, \angle ONA = \theta$$

由于$\overset{\frown}{AB}$是公共的，所以 $r\Delta\varphi = l\Delta\Phi$，因此

$$\Delta\varphi = \frac{l\Delta\Phi}{r} = \frac{\Delta\Phi}{\sin\theta}$$

与前面讨论的行星近日点的进动相比较，这里的纬度和行星所处的切锥面的倾角 ψ 有几何关系 $\theta = \pi/2 - \psi$，上式表示的关系式转变为

$$\Delta\varphi = \Delta\Phi/\cos\psi$$

与前面得到的关系式相符。实际上在地球转动一周的过程中，切线 AN 作为母线构成地球的切锥面．乙观测的转角 Φ 即为切锥面的切锥角，也就是图 6.2.3 右图所画的展开在平面上的 Φ。因此当观察者乙由 $\Phi = 2\pi$ 判断地球旋转了一周时，甲看到地球的转角已超过了 2π，即发生了“近日点进动”。

6.3 史瓦西黑洞

6.3.1 史瓦西黑洞

黑洞的概念最早来自拉普拉斯(P. S. Laplace)1798 年的预言。按牛顿力学，在质量为M、半径为R的球状星体表面上，质点 m 具有引力势能为 $-GMm/R$。若质点在星体表面上具有初速度 v_0，当它运动到距离球心 r 处时，速度减少到 v。由机械能守恒，有关系式

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{Mm}{R}$$

若质点 m 要脱离 M 的引力范围即 $r \to \infty$ 到达无穷远处，必须具有一定的初始动能，其最小初速度(称为逃逸速度)$v_{逃}$对应 $v = 0$，所以应满足方程

$$\frac{1}{2}mv_{逃}^2 - G\frac{Mm}{R} = 0$$

由此得到在该星体上的逃逸速度

$$v_{逃} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

逃逸速度与质点 m 无关，仅由星体的性质决定。若星体半径非常小，密度非常大，以致于逃逸速度大于或等于光速，则光线也不能到达无穷远点，这样，距星体很远处的观察者将不能收到任何有关该星体的信息，包括看不到星体发射的光线，当然如果观察者离星体不远的话，还是可以看到星体表面发射的光线的。星体虽然存在却不能被远处看到，称为黑洞。取逃逸速度等于 c 代入上式，即得到拉普拉斯根据牛顿理论预言的黑洞的临界半径

$$R_c = 2\frac{GM}{c^2} \qquad (6.3.1)$$

在广义相对论中也有黑洞的概念，但与拉普拉斯的黑洞有本质的不同。

前面在图 6.2.2 中引出了史瓦西半径或引力半径 r_g，在 (6.2.9) 式中定义 $r_g = 2GM/c^2$。r_g 是广义相对论中很重要的参量，$r_g \propto M$，由 M 决定。对地球 $r_g = 8.8 \times 10^{-3}$m，还不到 1 cm；对太阳 $r_g = 3.0 \times 10^3$ m。地球和太阳的半径都远远大于它们相应的引力半径。至今观察到的星体的半径都大于它们的引力半径，这些星体的场，也就是我们生活的时空，都是属于 $r > r_g$ 的情况。

假设有半径非常小的天体，半径小于其引力半径，史瓦西外部解几乎适用于全空间，除 $r > r_g$ 区域外，还有 $r < r_g$ 的区域。当 $r = r_g$ 时 $g_{11} = -\left(1 - 2\frac{GM}{c^2 r}\right)^{-1}$ 发散，将导致 ds^2 无意

义。计算表明，$r = r_g$ 处时空的曲率都是有限的，所以史瓦西解在 $r = r_g$ 处仍有意义，造成发散的原因是坐标的问题。如果选择合适的坐标，就可以解决现行坐标系在 $r = r_g$ 处发散的问题。现行的史瓦西坐标系除了 $r > r_g$ 处外，在 $r < r_g$ 时也适用。$r < r_g$ 的区域就是广义相对论的史瓦西黑洞。

6.3.2 史瓦西黑洞的视界

$r = r_g$ 是重要的球面，球面上发出的光线在球面外看不到，看不到的原因不是牛顿力学的逃逸速度问题，可以从光线的引力红移讨论。前面讨论引力红移时得到，引力场中 A 处静止光源发出固有频率为 ν_0 的光，在 B 处观测的频率为（见3.3.1）

$$\nu_B = \left(1 - 2\frac{GM}{c^2 r_A}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - 2\frac{GM}{c^2 r_B}\right)^{-\frac{1}{2}}\nu_0$$

现在取 $r_B > r_g, r_A = r_g$，则 $\nu_B = 0$ 即 B 处接收不到光信号。这样在 $r = r_g$ 球面上发的光，在球面外任意一点也看不到，这正是真正的“黑洞”，球面称为黑洞的视界。

按相对论的基本原理，静止质量为零的粒子（如光子）速度必然等于 c，静止质量不为零的粒子，其速度必然小于 c。下面选球坐标，只考虑径向运动，$\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\varphi = 0$。如第1章最后(1.4.3)所讨论的，在闵可夫斯基空间，因为

$$v = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \leqslant c$$

所以

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}r^2 \geqslant 0$$

上式对光子取等号。因此粒子在类时区运动，即在图1.4.2所示的光锥中按时间箭头进行运动，从过去（原点之下）到现在（原点）再到未来（原点之上），对运动的空间位置没有限

制。如前所述，ds^2 是坐标变换不变量，因此由广义相对性原理，在史瓦西场中的运动也必然满足 $ds^2 \geqslant 0$，即

$$ds^2 = c^2\left(1 - 2\frac{GM}{c^2r}\right)dt^2 - \left(1 - 2\frac{GM}{c^2r}\right)^{-1}dr^2 \geqslant 0$$

$$c^2\left(1 - 2\frac{GM}{c^2r}\right)dt^2 \geqslant \left(1 - 2\frac{GM}{c^2r}\right)^{-1}dr^2 \quad (6.3.2)$$

其中等号也是对应于光子的运动，但此时在上式中取等号得到的光子世界线不再是直的对角线而是曲线，为简单、清楚并易于与闵可夫斯基空间比较，我们只讨论某一时空点邻域的情况，这样光子的世界线可用其切线近似，于是也是个小光锥，只是锥角不再是 $\pi/2$。

在 $r>r_g$ 区域，$1-2\frac{GM}{c^2r}>0$，由(6.3.2)式得

$$\left(\frac{c\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}\right)^2 \geqslant \left(1 - 2\frac{GM}{c^2r}\right)^{-2} \quad (6.3.3)$$

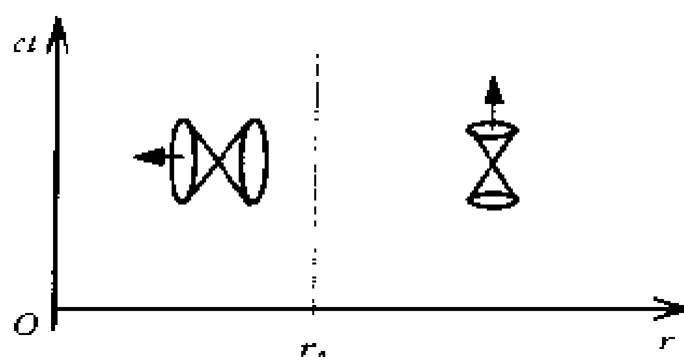


图 6.3.1

(6.3.3)式的解就是图 6.3.1(注意图中纵坐标的单位是 ct)中 $r>r_g$ 区域的上、下方向的小光锥，光锥母线斜率为

$$\pm\left(1 - 2\frac{GM}{c^2r}\right)^{-1} \quad (6.3.4)$$

与闵可夫斯基空间类似，在此区间的运动也是沿时间箭头进行的，可称之为正常时空。

在 $r < r_g$ 区域，$1 - 2\frac{GM}{c^2 r} < 0$，由(6.3.2)式得

$$\left(\frac{c\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}\right)^2 \leqslant \left(1 - 2\frac{GM}{c^2 r}\right)^{-2} \tag{6.3.5}$$

(6.3.5)式的解就是图6.3.1中 $r < r_g$ 区域的左、右方向的小光锥，光锥母线斜率也是

$$\pm\left(1 - 2\frac{GM}{c^2 r}\right)^{-1}$$

与闵可夫斯基空间完全不同，在此区间的运动是沿空间箭头进行的，凡进入此区间的粒子不可能静止，而是一直向原点运动，最后汇聚到 $r = 0$ 处。因此黑洞不像拉普拉斯所想象的那样内部还可存在星体，质量还可以分布于整个黑洞内，而是所有质量都集中在原点。按经典的广义相对论的引力理论，原点是密度、曲率无限大的奇点。现在正在发展量子引力理论，试图研究经典理论无法研究的 $r = 0$ 处的情况。

6.3.3 黑洞的性质

$r < r_g$ 区域就是这样一个时空性质异常的区域。我们称这样的单方向向中心运动的时空区域为黑洞，$r = r_g$ 球面是两种不同性质时空的分界面。对应于史瓦西解的黑洞称为史瓦西黑洞，它只有质量这一个参量。除此之外，稳定黑洞还有两种，分别具有角动量和电荷，这就不是史瓦西黑洞了，称为克尔(R.P. Kerr)以及瑞思纳 - 诺兹特洛姆(H. Reissner 和 Nordstöm)。可以用动力学方法从黑洞提取旋转动能和电能，直到黑洞的角动量和电荷为零为止，成为史瓦西黑洞。

有个关于黑洞的定律：在黑洞的动力学过程中，黑洞的视界总面积永不减少。这个定律类似于热力学第二定律，称为黑洞热力学第二定律。

从上面的讨论，粒子一旦进入黑洞就不可能出来，即黑洞

不能射出粒子。但是根据霍金(S. Hawking)1974 年的研究,黑洞还有热辐射,可以"射出"粒子。实际上这种辐射过程并不是从黑洞中有粒子逸出,而是一种真空量子涨落引起的效应。伴随真空涨落,不断地有正负粒子对产生和湮灭。黑洞视界附近有真空涨落,产生虚正负粒子对,其中一个粒子进入黑洞,另一个粒子穿过外引力区射出成为真实粒子,相当于黑洞辐射一个粒子,所以黑洞不是完全黑。小的黑洞因此会由于热辐射"蒸发"掉。

广义相对论予言了黑洞存在的可能,讨论了它的性质以及形成黑洞的可能机制。一般认为今天能够存在的黑洞主要有三种可能的形成机制:(1) 早期宇宙高密度介质密度涨落可以形成小黑洞,质量约为 10^{12} kg。(2) 恒星演化(详见下一章),质量约为几个到几十个太阳质量 $M_{\odot}$ 的恒星演化的终局为黑洞。(3) 超重星、星团、星系核坍缩形成巨型黑洞,质量约为 $10^4 M_{\odot} \sim 10^9 M_{\odot}$。除此之外,还有一种可能的形成黑洞的机制:密近双星的质量交流。双星系统中的中子星从另一个极端靠近的正常恒星表面汲取质量,当中子星质量超过中子星质量上限后,内部塌缩形成黑洞。图 6.3.2 艺术性地描绘了这个过程。

寻找和确定黑洞,是当前天文学和宇宙学的一个热点,寻找的根据是黑洞的各种效应,如黑洞的引力作用等。像对一些双星系统,只见到一个星体,由该星体的运动可计算双星系统的总质量,推断那个不可见的另一星是否是黑洞,现在认为可能是黑洞的天体有许多,如天鹅座 X-1(C_{yg}x-1),天蝎座 V861 的 X 射线伴星,圆规座 X-1 和 GX339-4。其中 C_{yg}x-1 由 X 射线谱确定质量为 $M = 12^{+3}_{-1} M_{\odot}$。又如很多证据表示,银河系中心存在黑洞。

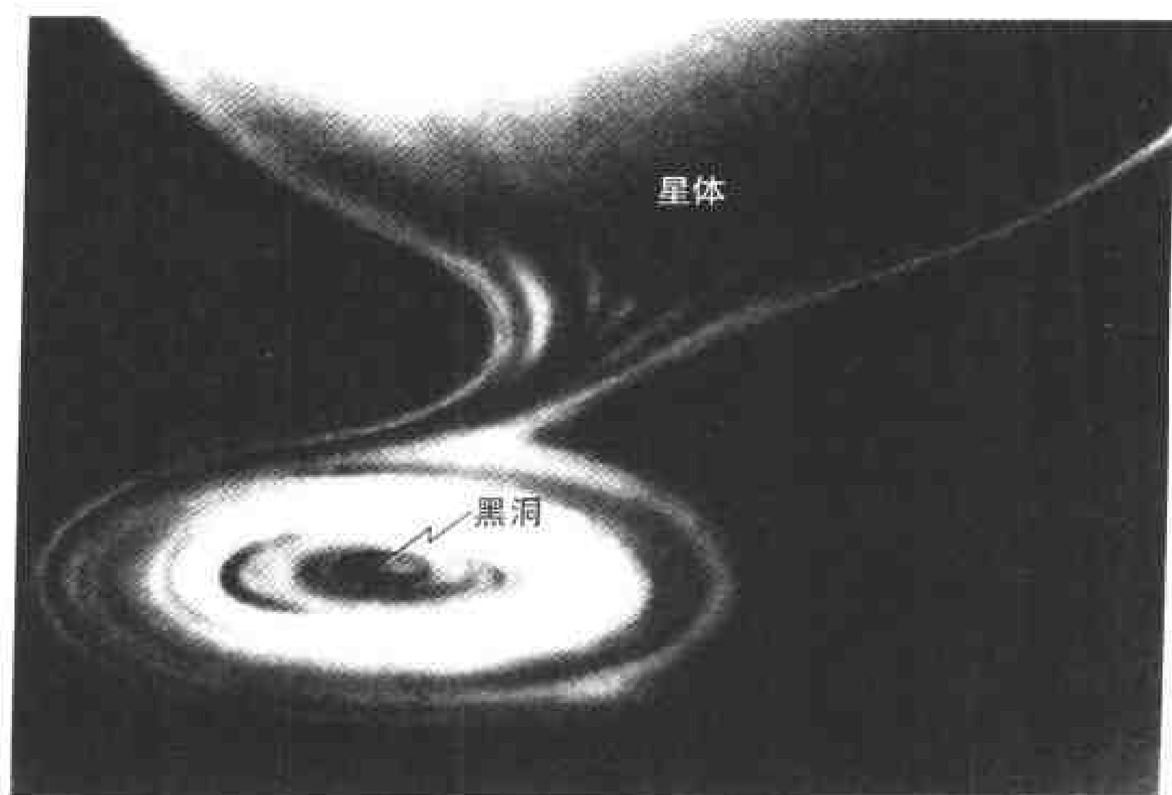


图 6.3.2[①]

黑洞是广义相对论的重要预言，黑洞的存在是对广义相对论的巨大支持。现在预言和由间接证据判断为黑洞的天体非常多，但是还欠缺最直接的证据。

---

① 取自 Halliday, D., and R. Resnick, *Fundamental of Physics*, third Edition Extended, John Wiley & Sons, Inc. (1974).

第7章　大爆炸宇宙学简介

宇宙包括一切天体所占据的空间，包括一切的各种形式存在的物质。“宇”指无限的空间，“宙”指无限的时间。

自古以来，地球上的人们在夜晚仰望星空，总是情不自禁地要了解地球之外的一切——浩瀚的宇宙，用尽自己一生所有的经验和智慧，尽情地想象着宇宙的过去、现在和将来。古人想象宇宙——天是神仙的居处，神秘莫测，诗人屈原对天发问，唐代刘禹锡写过《天问》，苍天从来都是让人惊叹的。爱因斯坦建立广义相对论之前，所谓的“宇宙学”也只是人们的想象和思辩而非科学。在牛顿定律和万有引力定律发现并取得巨大成功之后，人们也试图用牛顿力学来研究宇宙，但是立刻出现许多困难。例如，按牛顿的引力理论，无限的宇宙中引力将无穷大。又如，按牛顿的平直空间考虑，宇宙不能有限，因为有限空间必然有界，宇宙的界外是什么？界外之物为何不包括到宇宙中来？这是无法解释的，因此宇宙必须无限。但是在任何年代，人们直观经验所能把握的宇宙总是有限的，无限很不好理解只能在想象中实现，而且它即使现在无限，那它的过去是什么样，难道它“生”来就是无限的？在大小上没有发展变化？还有奥伯斯(H. Olbers，1758～1840)在1826年提出的著名的奥伯斯佯谬：如果宇宙是无限的，充满了大大小小的发光的星体，天空应该永远是明亮的，为什么夜晚的天空却是一片黑暗？爱因斯坦建立广义相对论，在时空观上有质的突破，说

明我们所处的空间是弯曲的。而后在1917年发表“根据广义相对论对宇宙学的考查”，指出用牛顿理论解决宇宙问题的困难几乎是无法克服的．用相对论的引力理论分析，在物质空间可以得到正的空间曲率，从而得到闭合(即有限)并有物质均匀分布的宇宙。在弯曲空间里，可以有限而无界，困扰人们多年的“有限必有界”的难题在广义相对论的弯曲空间里自然解决了。这篇论文被认为是现代宇宙学的开创性文献。从此，宇宙学从单纯的思辨进步到真正的科学论证，既有定量的理论计算，又有可以实测的预言。

引力在四种基本相互作用中是最弱的，但在大尺度的天体、天体物理、宇宙学中，引力占主导地位，其作用无可匹敌，研究宇宙学必须用相对论的引力理论。1922年费里德曼(Friedman)得到爱因斯坦场方程的动态解。1927年勒梅特(Lemaitre)提出大尺度空间随时间膨胀的动态膨胀宇宙概念，给费里德曼解赋予物理意义，这是宇宙学观念上的重大突破。而当时大多数人包括爱因斯坦，没有完全摆脱静态宇宙观念的束缚，一直致力于寻找场方程的静态解。1948年伽莫夫(Gamow)就在相对论引力理论基础上提出大爆炸宇宙模型，预言宇宙早期的He元素丰度应为0.25，当前宇宙应该有10 K左右的电磁背景辐射(后来他的学生将背景辐射修正为5 K)。他的理论当时并不被人们重视和接受，直到1965年彭齐亚斯(Penzias)和威尔逊(Wilson)发现3 K背景辐射，从此大爆炸宇宙模型方被大多数人接受，成为最成功的宇宙模型。以后天文观测的重大收获和广义相对论理论研究的一系列重大成就相互促进，引发宇宙学研究的高潮。宇宙学成为自然科学前沿，汇聚了各个学科的研究成果，也对各学科提出许多新课题。宇宙学知识已成为自然科学的基础学科。1984年日内瓦

欧洲核子研究中心召开的物理教学研讨会上，讨论应该把哪些新研究成果补充到物理教材时，第一个提到的就是宇宙学。杨振宁说，下一世纪的前沿科学将是生物物理、纳米物理和宇宙学。

历来都有人认为来自我们周围世界的规律不适于远离我们的世界，即宇宙间没有统一的客观规律，于是宇宙将是不可认知的。现在宇宙学的成功使人们坚信：宇宙是统一的，服从统一的规律，因此也是可以被人类认识的。尽管人几乎没有离开过地球，尽管人生短暂，体能有限，但人们可以根据从地球上探知的知识加上合理的理性思维去了解和解释那浩渺的宇宙。

在具体介绍大爆炸宇宙学之前，先介绍宇宙的概貌。

7.1 宇宙的概貌

天文学上常用单位有以下几种：天文单位 AU，是地球公转轨道长半轴的长度

$$1\text{AU} = 1.495985 \times 10^{11}\ \text{m}$$

光年 l.y.，为光线在一年内走的路程

$$1\ \text{l.y.} = 9.46 \times 10^{15}\ \text{m}$$

秒差距 pc，具体意义见后文。

$$1\ \text{pc} = 206265\ \text{AU} = 3.26\ \text{l.y.} = 3.09 \times 10^{16}\ \text{m}$$

7.1.1 当今宇宙概貌

从天文学角度来说，宇宙由各层次天体组成，有星体（从小到大依次为卫星、行星、恒星、星团、星系、星系团、超星系团）和星际物质（星际气体、尘埃、星云、星际磁场、宇宙线）组成。一些天体的各种参数的量级列在表 7.1.1 中。

表 7.1.1　各种层次的天体

天体层次	行星（地球）	恒星（太阳）	星际云	星团（球形）	星系	星系团	超星系团	宇宙
半径(pc)	10^{-10}	10^{-8}	10^{1}	10^{1}	10^{4}	10^{5}～10^{7}	10^{8}	10^{10}
平均距离(pc)	10^{-5}	10^{0}	10^{1}	10^{4}	10^{6}			
质量($M_{\odot}$)	10^{-6}	10^{0}	10^{3}	10^{6}	10^{11}	10^{14}	10^{15}～10^{17}	10^{21}
平均密度(g/cm³)	10^{0}	10^{0}	10^{-23}	10^{-21}	10^{-23}	10^{-26}	10^{-28}～10^{-30}	10^{-30}
中心温度(K)	10^{4}	10^{7}	10^{2}	—		—	-	

注：①密度主要指星体的贡献部分；

②宇宙的数据都是当前的估计值。

1. 星体

恒星是本身能发光的星球。像太阳这样正在发光的恒星，是高温等离子体气体球。星系由几十亿到几千亿颗恒星和星际气体、尘埃组成。银河系是包含太阳系在内的普通旋涡星系，大约有 10^{11} 个彼此距离 1 pc 的恒星构成的盘状恒星集团，银盘外还有约 200 个球形星团。银河系质量约为 $10^{12}M_{\odot}$。在距银河中心 1～2 l.y. 距离的银心区域质量约$(3～4)\times10^{6}$ $M_{\odot}$，估计有黑洞存在。旋转的银盘半径约为 15 kpc，银盘没有整体角速度，上面各点的角速度并不相同，与其到银心距离有关。太阳在银盘上，距银心 10 kpc，绕银心转动周期为 2.46×10^{8} 年，速度为 250 km/s。银河系的概貌见图 7.1.1。

银河系之外的星系叫河外星系。17 世纪用望远镜已看到河外星系，但当时以为它们是银河系内的星云。18 世纪康德猜测这些星云也是与银河系一样的星系，他称之为宇宙岛。20 世纪测出这些星云的距离远在银河系之外，才真正确定了是河外星系。其中仙女座大星云(系)是距离为 700 kpc 的旋涡

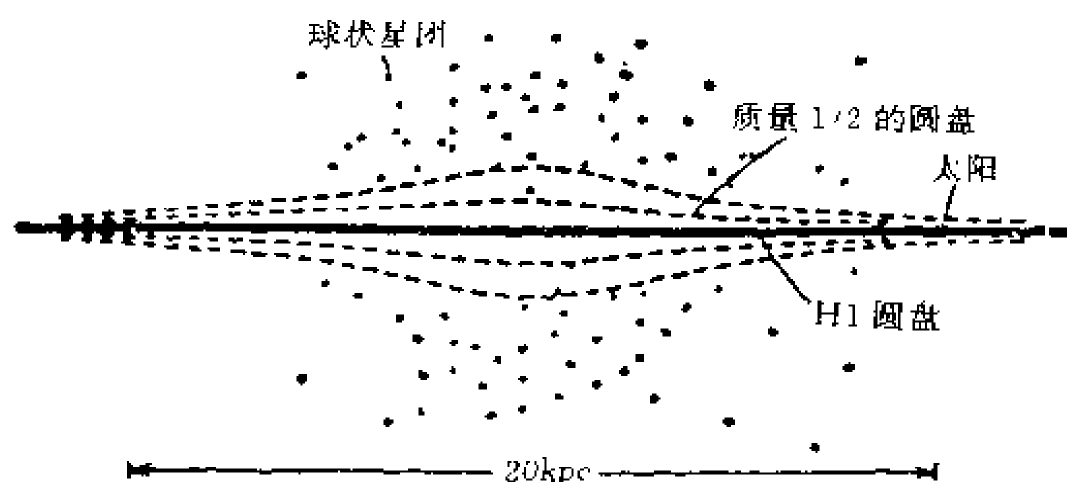


图 7.1.1 银河系概貌(通过自转轴剖面)

星系。此外还有椭圆星系和不规则星系。在 50 亿光年范围内约有 10^7 量级的星系。用现代望远镜可观察到 10^{10} 以上个星系。60 年代发现一些在光学上看类似恒星的天体，大部分有巨大的红移，估计是遥远的特殊星系，称为类星体，他们的数目为普通星系的 $10^{-4}\sim10^{-5}$。

彼此间有一定力学联系的星系构成星系团，半数以上星系属于星系团。星系团小的包含有十几个星系，大的有上千个星系。包括银河系、仙女座星系等大约 20 个星系的星系团叫本星系团。若干个星系团聚在一起构成超星系团，包括本星系团、室女星系团和大熊座星系团等 50 多个星系团的超星系团叫本超星系团，其尺度达 100 Mpc。在这样尺度上看星系团分布大体均匀，物质不再集中在中心而是分布成网，见图 7.2.1。

2. 星际物质

恒星之间的物质称为星际物质，主要是气体和尘埃。在银河系中星际物质占银河系总质量的 5%，平均密度为 10^{-24} g/cm^3，粒子数密度为 1～0.1 个/cm^3，比地球上的“真空”还稀薄得多(地球上最高真空约为 1.33×10^{-11} Pa，粒子数密度

约为 3×10^{2} 个/cm^3)，但由于气云的尺度(几百 pc)远远大于气体分子的平均自由程(约 3×10^{-4}pc)，所以绝不能说星际空间是真空。

气体并不是均匀分布的，成团的混有尘埃的气体成为大片气云，小气云块质量为$(10^3\sim10^4)M_{\odot}$，粒子数密度为 $10^2\sim10^5$ 个/cm^3，温度约 10 K。小气云块构成巨分子云，质量可达$(10^5\sim6\times10^6)M_{\odot}$，尺度可达几十 pc。

尘埃是较大颗粒，尺度大约 10^{-5}cm，尘埃质量约为气体质量的 1%。

3. 物态

地球上主要是气、液、固三态，宇宙中可观测部分中最主要的是等离子体态。银河系中可观测物质的 99.9%处于等离子态，其中最主要的是恒星形式的等离子气球。等离子体中一般是离子、电子和中性原子，整体上呈现电中性，大尺度上电磁作用不显著。

4. 宇宙膨胀

1929 年哈勃(E. P. Hubble)发现河外星系都离我们而去，退行速度与星系的距离成正比，所以当前的宇宙正在不断地膨胀。

7.1.2 天体距离和天体质量的测定

分析、认识天体就是测量和确定天体的一系列参数。这不是简单的实地测量，而是集中人类已有的一切技术手段接收和分析各种信息，运用人类一切知识研究天体和宇宙的规律，才能在地球上确定天体的参数。这里讨论天体距离、质量的测定。

1. 天体距离的测定

(1)三角视差法

近距离（≤100 pc）的天体距离用三角视差法直接测量。观测者在不同位置看到同一天体的方向之差角叫视差，记为θ，见图 7.1.2。两个不同位置的联线叫基线，长度记为a。若在一个位置视线与基线垂直，则天体P距离为（一般情况下$\theta \ll 1$）

$$r = \frac{a}{\sin\theta} \approx \frac{a}{\theta} \qquad (7.1.1)$$

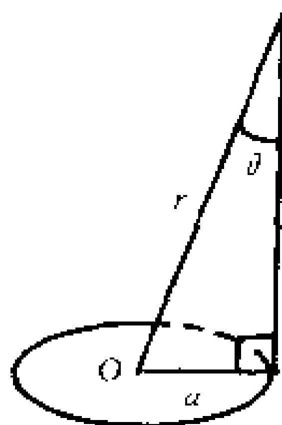


图 7.1.2　三角视差法

地球上的观察者可以采用的最方便、最长的基线为日地距离，即三角视差法中一般取$a = 1$ AU。这样在$\theta = 1''$时P点的距离正是 1″差距（1 pc），这就是秒差距名称的来历——视差为 1″的距离。若θ以角秒为单位时

$$r = \frac{1}{\theta}(\mathrm{pc}) \qquad (\theta\text{以角秒为单位}) \qquad (7.1.2)$$

测太阳系内天体距离时基线可选为地球半径。

（2）光度视差法

地球上测的天体亮度叫视亮度，即天体在地球上的光照度，记为l。天体实际的亮度叫绝对亮度记为L，即天体作为点光源的总发光功率。星体发出的光线均匀分布，单位面积上的光的功率与距离平方成反比，因此距离为r的星体视光度与绝对光度关系为

$$l = \frac{L}{4\pi r^2} \qquad (7.1.3)$$

这样如果能确定星体的绝对亮度，并测出它的视亮度，就可以由（7.1.3）式计算出距离r。

在光谱学中发现恒星谱线中有些谱线的强度或宽度与绝

对亮度 L 有关，由此可得到该星体的绝对亮度 L，此法称为分光视差法，可测距离$\leqslant 5\times 10^4$pc。

主序星的绝对光度和光谱型（即颜色，取决于表面温度）有严格关系，由此可确定星体的绝对亮度 L，此法称为主序星测光法，可测距离$\leqslant 10^5$pc。

另一种重要方法是利用造文变星，造文变星是变星的一种，其发光有周期性变化，光变周期较长并且与绝对光度有确定的线性关系——周光关系：光度越大，光变周期越长。由此得到星体的绝对亮度。有人称造文变星为"量天尺"，可测距离小于 4×10^6pc。

(3) 哈勃定律测距

由哈勃定律，距离为 r_0 的河外星系退行速度为（哈勃定律的详细内容见后文）

$$v_0 = H_0 r_0 \tag{7.1.4}$$

H_0 为现在的哈勃常数。测出河外星系的相对红移 $Z=\frac{\nu_0-\nu}{\nu_0}$，由光学多普勒效应求出河外星系退行速度 v_0，就可以由(7.1.4)式得到距离 r_0。例如现在知道的红移最大的类星体 $Z=0.934$，取 $H_0\sim 50\ \mathrm{km\cdot s^{-1}\cdot Mpc^{-1}}$，计算出其距离大于150亿 l.y.（具体计算还要考虑一些修正）。

2. 天体质量的确定及暗物质

(1) 恒星质量测定

对质量为 M_1、M_2 的双星系统，由开普勒三定律得到两星体质量之和为

$$M_1 + M_2 = \frac{4\pi^2}{G}\frac{a^3}{T^2} \tag{7.1.5}$$

其中 a 为轨道的半长轴，T 为周期。如果能够用其他方法得到

其中一个的质量，就可以由上式得到另一个星体的质量。

主序星（主序星的定义见后面）的绝对光度 L 与质量 M 有如下关系

$$\left.\begin{aligned}\lg\frac{M}{M_\odot}&\approx\frac{1}{4}\lg\frac{L}{L_\odot}, & L>L_\odot\\ \lg\frac{M}{M_\odot}&\approx\frac{1}{2.8}\lg\frac{L}{L_\odot}, & L<L_\odot\end{aligned}\right\}\tag{7.1.6}$$

其中 $L_\odot$、$M_\odot$ 分别为太阳的绝对光度和质量。这样确定了主序星的光度 L，就可得到它的质量 M。

(2)星系的质量

对涡旋星系，在星系可视区域靠边缘处找到近似绕星系中心做稳定圆周运动的恒星，设它的速度为 v，到星系中心距离为 r，质量为 m。近似星系为均匀球体，质量为 M，由牛顿定律

$$m\frac{v^2}{r}=G\frac{Mm}{r^2}$$

于是由该恒星的速度 v 和到星系中心距离 r 可以计算星系的质量 M

$$M=\frac{r}{G}v^2\tag{7.1.7}$$

对双星系，即有力学联系做相对运动的两个星系，也可用类似双星的方法计算它们的质量和，一般双星系平均间距约为 0.15 Mpc，典型相对速度为 200 km/s，周期为 5×10^9 年。

(3)当今宇宙的星系质量密度和暗物质

用(7.1.7)式或其他方法测出星系质量，从而计算出当前宇宙的质量密度 ρ_c，由于主要是星系提供的质量，因而又称为星系质量密度 ρ_g。由可以看到的星系部分计算出 $\rho_g\approx3\times10^{-31}\,\mathrm{g/cm^3}$；用动力学方法（例如用(7.1.7)式计算）估计的密

度比 ρ_g 大 10 倍以上；由宇宙学估计现在密度大约是 10^{-29}g/cm^3 量级。由此可见，占质量大部分的物质是看不见的，称为暗物质。现在还不能确定构成暗物质的东西是什么，可能性最大的是中微子。目前认为中微子可能的静质量为 6×10^{-32}g。如果中微子的静质量就是这么大，中微子与光子数密度相同，都是 400 个/cm^3，则中微子对质量密度的贡献达 2.4×10^{-29} g/cm^3，那么构成宇宙的质量的 9/10 以上的物质就是中微子而不是重子，正是这些中微子决定了宇宙的今天和明天。

7.1.3 恒星的诞生和演化

恒星在宇宙中扮演着重要角色，恒星的诞生和演化丰富多彩，构成宇宙演化中最主要的内容。宇宙中绝大多数元素都是在恒星诞生、演化过程中产生的，所以称恒星为炼制元素的坩埚。

在宇宙发展到一定时期，宇宙中充满均匀的中性原子气体云。大体积的气体云由于引力不稳定而造成坍缩。下面利用经典引力理论大致地讨论这一过程。考虑密度为 ρ、温度为 T、半径为 r 的球状气云系统。

由气体分子运动论，气云热运动能量为（将气体看作单原子理想气体）

$$E_T = \frac{3}{2}\frac{M}{\mu}RT = 2\pi\frac{\rho r^3}{\mu}RT \qquad (7.1.8)$$

其中 μ 为气体分子的摩尔质量，R 为气体普适常数，$R=8.31$ J·K^{-1}·mol^{-1}。

为了得到气云球的引力能 E_g，想象将球的质量一点点移到无穷远处，将气体球全部移走，引力场力做的功就等于 $-E_g$。当球质量为 m，半径为 r 时，从表面移走 dm 到无穷远的过程中场力做功为

$$\mathrm{d}W = -G\frac{m}{r}\mathrm{d}m = -G\left(\frac{4}{3}\pi\rho\right)^{\frac{1}{3}}m^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}m$$

其中由 $m=\frac{4}{3}\pi\rho r^3$，得到$\frac{1}{r}=\left(\frac{4}{3}\pi\rho\right)^{\frac{1}{3}}m^{-\frac{1}{3}}$，于是得到上式的最后一步。因为 ρ 为常数，所以

$$-E_g = -\int_M^0 G\left(\frac{4}{3}\pi\rho\right)^{\frac{1}{3}}m^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}m = \frac{3}{5}\left(\frac{4}{3}\pi\rho\right)^{\frac{1}{3}}M^{\frac{5}{3}}$$

再利用上面的关系$\left(\frac{4}{3}\pi\rho\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{r}M^{\frac{1}{3}}$代入上式得

$$E_g = -\frac{3}{5}G\frac{M^2}{r} = -\frac{16}{15}\pi^2 G\rho^2 r^5 \qquad (7.1.9)$$

而气云总能量 E 为

$$E = E_T + E_g \qquad (7.1.10)$$

热运动使气体分布均匀，引力使气体集中。现在两者共同作用，当 $E>0$ 时，热运动为主，气云是稳定的，小的涨落不会影响气云平衡，$E<0$ 时，引力为主，小的密度扰动产生对均匀的偏离，密度大处引力增大，使偏离加强而破坏平衡，气云开始坍缩。由 $E=0$ 得到产生收缩的临界半径为

$$r_c = \sqrt{\frac{15RT}{8\pi G\rho\mu}} \qquad (7.1.11)$$

相应的气云收缩的临界质量(M_c)为

$$M_c = \frac{4}{3}\pi\rho r_c^3 = \frac{5RT}{2G\mu}r_c \qquad (7.1.12)$$

原始气云密度小，临界质量很大，取 $\mu=2\times10^{-3}$ kg/mol，$\rho=10^{-30}$ g/cm^3=10^{-27} kg/m^3，$T=10$ K，得

$$r_c = 6\times10^{21}\mathrm{m} = 2\times10^5\ \mathrm{pc}, M_c = 4\times10^6 M_\odot$$

可见初始情况下的临界半径和质量都很大，在扰动下超过临界质量的大块气云开始收缩。收缩过程中密度增加。由于 $\rho\propto$

r^{-3}，由(7.1.11)式 $r_c \propto \rho^{-\frac{1}{2}}$，因此

$$r_c \propto r^{\frac{3}{2}}$$

假设恰好在 $r=r_c$ 时气云球开始收缩，半径 r 不断减少，由上式可知 r_c 减少得更快，收缩气云的某一部分又可以达到新条件下的临界状态，小扰动可以造成新的局部坍缩。如此下去在一定的外界条件下大块气云收缩为一个个凝聚体，成为原恒星。所以很少有恒星单独产生，大部分是一群恒星一起产生成为星团。球形星团可以包含 $10^5 \sim 10^7$ 个恒星，可以认为是同时产生的。在大气云收缩过程中释放的能量一般以红外光线辐射出去，气云温度可以保持不变。

原恒星吸附周围气云后继续收缩，表面温度基本不变，中心温度不断增高，直到中心发生 H—H 热核反应或 C—N—O 循环的热核反应之后，产生的热能使气温升得极高，产生的气体压力抵抗引力使原恒星不再收缩，稳定下来成为恒星。等到 H 稳定地“燃烧”(指热核反应，以后形象地称这些热核反应为燃烧)为 He 时，恒星成为主序星。太阳经历这段历程约千万年。

选恒星的光度 L 和表面温度 T 为参量做出的星体的光度-表面温度图叫赫罗(赫兹普龙-罗素 E. Hertzsprung-H. N. Russell)图，简称 H-R 图。用 H-R 图可以描绘演化过程，可以讨论和比较恒星的性质。把星团、星系的星体画在 H-R 图上，发现大部份星体位于图上一条从左上到右下的斜线带上，如图 7.1.3 所示，这条斜线带称为主星序。位于主星序上的恒星叫主序星。主序星化学成分均匀，核心处 H 燃烧成 He。对于质量一定的星当它位于主星序上时体积最小，因此又称为矮星(不是白矮星)。质量大的主序星靠左上，质量小的主序星靠

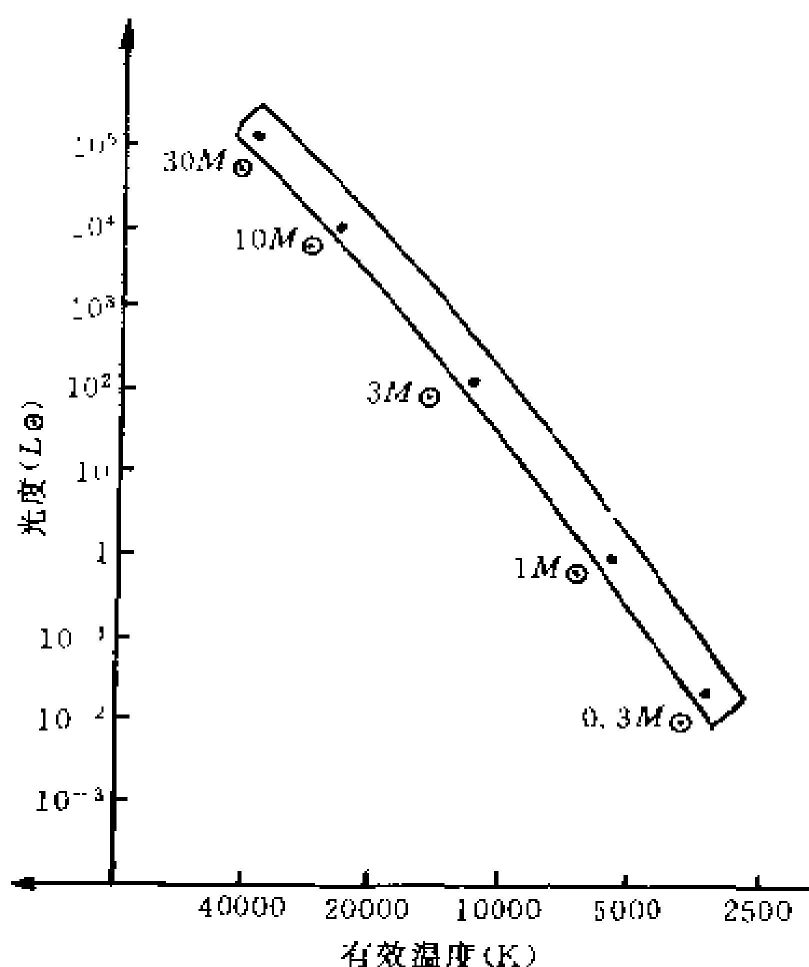


图 7.1.3　主序星在理论 H R 图上的位置

右下，恒星一生中以主序星时期最长。在此期间核心中 4 个 H 燃烧成一个 He。反应中质量亏损为 $\Delta m = 4m_{\mathrm{H}} - m_{\mathrm{He}} = 0.02870 m_{\mathrm{H}}$。估计主序星 12%的质量的 H 燃烧成 He，根据其燃烧速率$\frac{\Delta mc^2}{L}$可以估算出主序星燃烧的时间即主序星寿命为(设主序星质量为 M，光度为 L)

$$t \approx \frac{0.12M}{4m_H}\frac{\Delta mc^2}{L} = 8.61 \times 10^{-4} c^2 \frac{M}{L}$$

将质量与光度的关系式(7.1.6)式代入，已知 $M_\odot = 1.989 \times 10^{33}$ g，$L_\odot = 3.826 \times 10^{26}$ J/s 得

$$t \approx \begin{cases} 10^{10}\left(\frac{M_\odot}{M}\right)^3 = 10^{10}\left(\frac{L_\odot}{L}\right)^{\frac{3}{4}} \quad (\text{年}), & L > L_\odot \\ 10^{10}\left(\frac{M_\odot}{M}\right)^2 = 10^{10}\left(\frac{L_\odot}{L}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (\text{年}), & L < L_\odot \end{cases} \tag{7.1.13}$$

其中时间单位为年。可见质量越大的主序星寿命越短。恒星一生以主序星阶段时期最长，所以恒星寿命近似为主序星寿命。太阳的寿命约为 100 亿年，它的年龄约 50 亿年，还只度过其寿命的一半。

当主序星核心 H 耗尽后就离开主星序向右上方红巨星发展，此时该恒星年龄就近似等于它在主星序上的寿命。球形星团的恒星可以认为是同时诞生的，将它们画在同一个 H-R 图上，见图 7.1.4，其中大质量星已离开主星序形成拐点，质量小的还在主星序上。拐点处恒星年龄等于它在主星序上的寿命，可以按(7.1.13)式计算出来，这也就是该星团年龄。由图 7.1.4 查出拐点处恒星的光度代入(7.1.13)式计算，知 M3 星团年龄大于 100 亿年。现在公认最老星团年龄约为 160 亿年。这种利用 H-R 图估计星团年龄的方法是天文学上确定星体年龄的非常重要的方法。

主序星核心 H 耗尽后，离开主序星阶段开始了它最后的历程，结局主要取决于质量。

(1)低质量星($M < 3M_\odot$)，中心收缩燃烧 He，成为红巨星、超红巨星，半径可达 $300R_\odot$，外层飘散，内核成为白矮星。典型白矮星质量约 $1M_\odot$，半径约 5000 km，其内部热核反应停止，物质全部电离靠简并电子气压强平衡引力，1931 年钱德拉塞卡(Chandrasekhar)计算出白矮星质量上限为

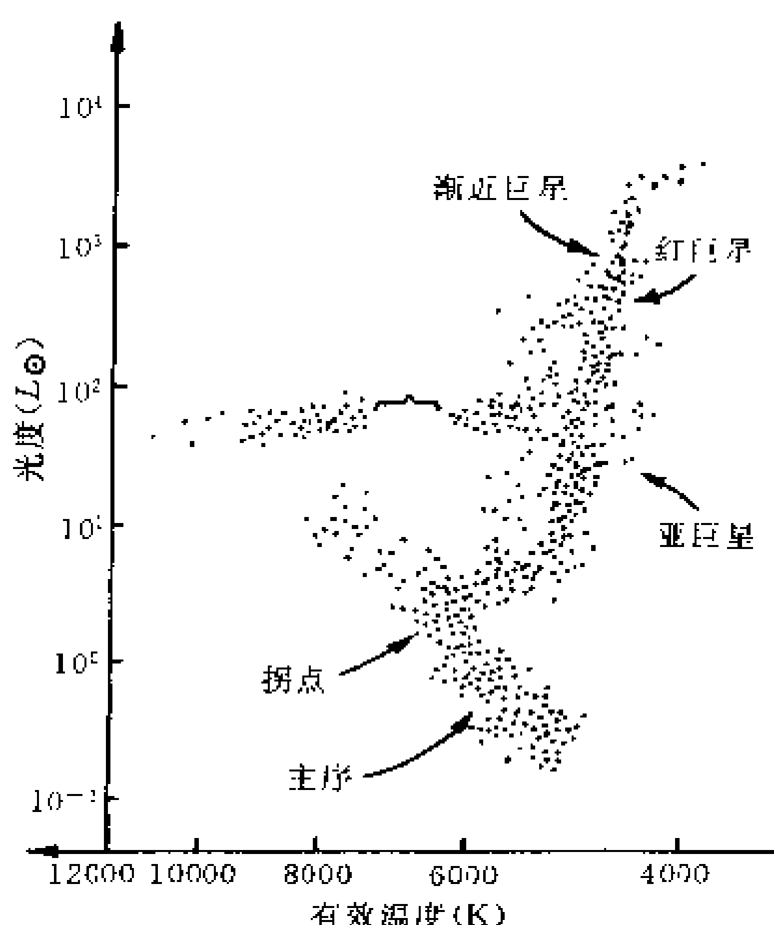


图 7.1.4　球状星团 M3 在 H-R 图上的位置

$$M_{ch} = 5.87\frac{Z^2}{A^2}M_\odot \tag{7.1.14}$$

其中 A、Z 分别是组成白矮星的物质原子的原子量和原子序数。对 $^{12}_{6}C$，$M_{ch}=1.47M_\odot$；对 $^{56}_{26}Fe$，$M_{ch}=1.26M_\odot$。刚开始白矮星表面温度很高，呈白色，故称为白矮星(矮指半径小)。

(2)大质量星中心 He 烧成 C 后继续热核反应，直到烧成铁核心，星体膨胀经蓝超巨星或红超巨星发展成超新星，超新星爆发后抛出大量物质，中心部分有的成为中子星，有的可能坍缩成为黑洞。中子星是最致密的星体，质量约为(0.5～2.7)$M_\odot$，半径约为 7～20 km，内部压强达到 $10^{29}\sim10^{41}$ N/

cm^2,此时简并电子气压力不足以平衡引力,星体坍缩将核外电子压入核内出现中子化,简并中子压力与引力平衡成为稳定星体。中子星表层有很强的磁场,高速自转的中子星定向发射电磁波成为脉冲星。1934 年就提出中子星概念,33 年后终于发现了脉冲星。稳定中子星最大质量约 $3M_\odot$左右。在那些中心部分质量超过中子星临界质量的星体内,任何力也抵抗不了引力的作用,它们将不可遏制地一直坍缩成黑洞。

现在观测到的恒星质量范围为$(0.1\sim60)M_\odot$,质量小于$0.08M_\odot$的天体靠自身引力不能使它的核心达到热核反应点火温度,因此不发光,不能成为恒星。大于 $60M_\odot$的天体中心温度过高而不稳定,至今尚未发现。

7.2 宇宙学原理和哈勃定律

7.2.1 宇宙学原理

从实际观察了解到,宇宙在中小尺度上物质分布不均匀,星体、星团是孤立地分布着,但从大尺度即宇观尺度,在超星系团层次($>10^8$ l. y.)上、宇宙的分布就均匀了。超星系团具有网状结构,分布的物质已经"联接"起来。这就好像人们观察物质,在微观层次上是孤立的不连续的原子、分子,在宏观层次上物质就是连续、均匀的。图 7.2.1[①] 是普林斯顿研究所 Michael Strauss 利用美国国家宇航局的红外天文卫星所得资料编制的距离我们 3～10 亿 l.y. 的天体分布图,它清楚地显示了大尺度上星系分布的均匀性。其中中心线附近的空白区是由于这部分天空被银河遮蔽所致。微波背景辐射的均匀和各向同性也是宇宙分布均匀的重要证据,而且由于背景辐

---

① 取自《科学》1995 年第 2 期 11 页。

射是以前宇宙发展的遗迹，因此还暗示着宇宙的过去也是均匀的。于是有作为宇宙学基础的宇宙学原理：**在宇观尺度下，任何时刻宇宙空间是均匀的和各向同性的。**

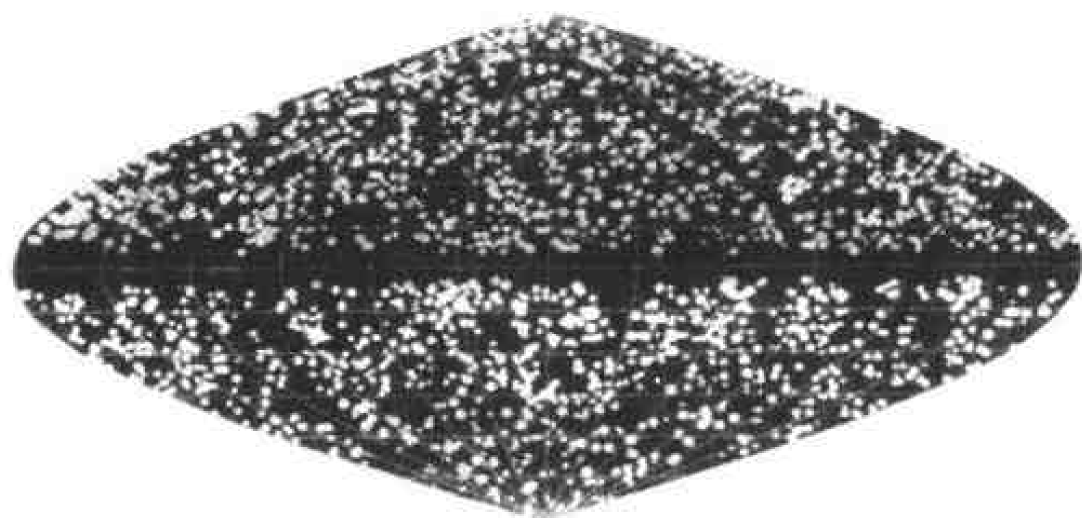


图 7.2.1　大尺度上星体的分布均匀

这是很强的假设，因为它断定在“任意时刻”宇宙空间都均匀和各向同性，就是将现在观测的宇宙性质推广到过去和将来。

宇宙均匀和各向同性，具有三维纯空间的最高对称性，可以证明，这样的空间必然是常曲率空间[①]。因此从宇宙学原理得到关于宇宙时空的一个重要结论是：**任意时刻宇宙的空间是三维常曲率空间。**曲率可正可负也可为零，但必定是常数。这样的空间没有确定的中心，或者说处处都是中心，各处平权。可以直观地在欧氏空间看到一、二维常曲率空间的各处平权的性质。圆周是一维常曲率空间的例子。在圆上任找一点，整个圆周都对于该点对称，该点即为圆周的中心。另外可以看

① 刘辽．广义相对论．高等教育出版社（1987）．

到，圆周是有限（长度有限）而又无界的（一维空间的“界”是与外界的交点，如线段的二个端点）。类似球面是二维常曲率空间的例子，球面上的任意一点都是球面的中心。同样球面也是有限（面积有限）而又无界。二维空间的“界”是与外界的交线，如平面矩形的四条边。上述两例也正是弯曲的有限空间有限而无界的直观例子。

哥白尼否定了地心说，引起天文学上的革命，也是宇宙观的革命，因此今天把宇宙各点位置平权当作基本原理时，称之为哥白尼原理：**宇宙中没有任何一点具有优越性，所有的位置都是平权的。**

反过来由哥白尼原理可以推证宇宙必然密度均匀。设有两个观测点 O、O'，观测到的宇宙空间的密度分别记为 ρ、ρ'。对空间同一点 P'，两观测点的观测应相等，即

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \rho'(\boldsymbol{r}')$$

取 P 点，使 P 点相对 O 的方位与 P' 相对 O' 方位相同，即 P 在 O 系中矢径也为 $\boldsymbol{r}'$（见图 7.2.1），由位置平权原理，O 系测 P 点的密度应该等于 O' 系测 P' 点的密度，即

$$\rho(\boldsymbol{r}') = \rho'(\boldsymbol{r}')$$

于是有（其中 $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}$）

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r}') = \rho(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a})$$

由于 $\boldsymbol{a}$ 是任意选取的，所以如 $\boldsymbol{r}$ 确定的话，$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}$ 为空间任意点，因此空间中各处密度相同。

由哥白尼原理，每个观测者看到的宇宙图景是一致的，因此我们可以从宇宙的局部去研究宇宙的整体，从地球上研究宇宙。如果宇宙是变化的，与时间有关，不同地点观测者要看到同样的图景，必须在相同时间来观测，也就是说要有共同的时间标准——宇宙时，宇宙学原理以存在宇宙时为前提。哥

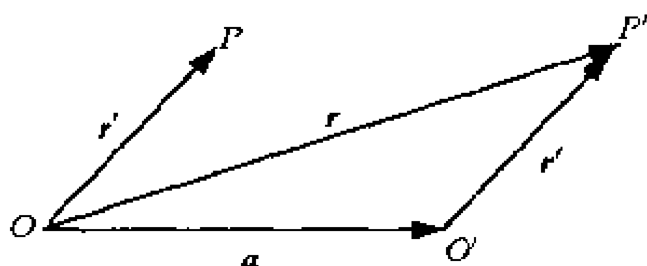


图 7.2.2　由哥白尼原理推证宇宙密度均匀

白尼原理与宇宙学原理是相通的。

引入宇宙时之后，由哥白尼原理可以很简单地讨论宇宙的变化模式，发现宇宙的变化只可能有三种情况：静止、径向膨胀、径向收缩。仿照前面由哥白尼原理推证宇宙密度均匀的方法，任选两点 O 和 O' 建立参考系，见图 7.2.2。设宇宙时为 t 时刻 O' 系中 P' 处星体速度为 $\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{r}',t)$，$O$ 系中 P' 处星体速度为 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$，由经典力学速度合成得

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{v}'(\boldsymbol{r}',t) + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{a},t)$$

P 点相对 O 系的方位与 P' 点相对 O' 系的方位相同，由位置平权原理，O 系中 P 处速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}',t)$ 应该等于 O' 系中 P' 处速度 $\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{r}',t)$，将此关系代入上式得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t) &= \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}',t) + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{a},t) \\ &= \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a},t) + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{a},t)\end{aligned}$$

选定 $\boldsymbol{r}$ 后，$\boldsymbol{a}$ 可任意选。则上式的解为

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t) = f(t)\boldsymbol{r} \tag{7.2.1}$$

其中 $f(t)$ 为 t 的任意函数。于是

若 $f(t)=0$，$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)=0$，　　宇宙静止

若 $f(t)>0$，$\boldsymbol{v}\propto\boldsymbol{r}$，　　宇宙膨胀，星系径向飞散

若 $f(t)<0$，$\boldsymbol{v}\propto\boldsymbol{r}$，　　宇宙收缩，星系径向汇聚

当今的宇宙是这三种可能情况的哪一种，要靠实验观测。

7.2.2 哈勃定律

1929 年哈勃利用加利福尼亚州威尔逊山上的 1.5 m 和 2.5 m 天文望远镜对几亿 pc 范围内的星系进行研究。那时已经发现河外星系有谱线红移现象，即光谱线比正常的光谱线向波长长的方向移动，称之为宇宙学红移，以为是一种特殊的红移现象。哈勃认为宇宙红移就是熟知的光学多普勒红移，即由于发光体离观察者远去引起的光谱线移动(如果发光体朝着观察者运动，光谱线将向波长短的方向移动，称为紫移或蓝移)。河外星系的光谱线红移，表明它们都在背离我们远去。当时有 46 个河外星系的可利用的红移资料，其中已知距离的有 24 个星系，哈勃利用这 24 个星系的光谱线红移计算出它们相对银河系中心视线方向上的退行速度 v_0，发现退行速度与星系到银河系中心的距离 l_0 成正比，见图 7.2.3，即著名的哈勃定律

$$v_0 = H_0 l_0 \tag{7.2.2}$$

H_0 是当前时刻(宇宙时记为 t_0)的哈勃常数。将此关系推广到

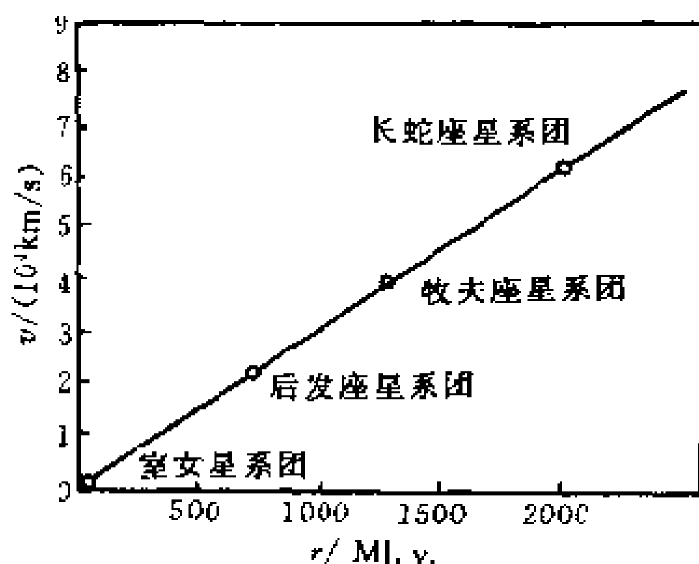


图 7.2.3 哈勃定律：$v \propto r$

任意时刻 t,有关系

$$v(t) = H(t)l(t) \tag{7.2.3}$$

对比这个普遍关系,(7.2.2)式中的物理量都是当前时刻 t_0 的,即

$$v_0 = v(t_0), H_0 = H(t_0), l_0 = l(t_0)$$

随着宇宙的演化,哈勃常数 $H(t)$也在变化。引力作用下星系的退行速度会越来越小,因此 H 随 t 单调减小。(7.2.3)式正是(7.2.1)式 $f(t)$大于零情况,哈勃定律证明了宇宙学原理的正确性。哈勃得到这个简单关系后非常激动地写道:"如此少的资料,如此局限的分布,然而其结果又是如此肯定"。哈勃定律是20世纪天文学最杰出的发现,彻底改变了传统的认为宇宙在整体上是静止的观念,使宇宙观在哥白尼的日心说之后又一次发生革命性变革。即使像爱因斯坦这样极具创新精神的伟大科学家,也受静止宇宙观束缚而与膨胀宇宙的发现失之交臂。

H_0 的测定一直是天文观测的重要课题,1936 年哈勃给出 $H_0 = 526\ \mathrm{km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}}$,到 50 年代有天文学家指出哈勃的距离定标有错误。到 1958 年,Sandage 总结当时进展,得到 $H_0 = 75\ \mathrm{km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}}$。此后继续为确定哈勃常数而努力,但不同方法测得结果一直很弥散,大体上分布在 40～80 $\mathrm{km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}}$之间。取值如此不确定,是因为影响红移数据、光度、距离测定的因素很多,特别是距离的测准非常困难,此外宇宙演化也有影响。1990 年发射的哈勃空间望远镜可以在地球大气之外观测,它的主要目标之一就是要可靠地确定哈勃常数,期望能在 20%的精度内确定 H_0 值。从 1994 年开始陆续发表从哈勃望远镜观测所推断的 H_0 数值为 $80 \pm 17\ \mathrm{km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}}$(1994 年)、$69 \pm 8\ \mathrm{km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}}$(1995

年)……依然离散较大,并未能最终确定 H_0 值。其中测定值的绝对误差都不大,因为只考虑了观测的统计误差,定标方法带来的系统误差并未包括在内[①]。考虑 H_0 数值不同的影响,本章取 $H_0=50\ h_0\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}\cdot\mathrm{Mpc}^{-1}$,按现在数据,$1\leqslant h_0\leqslant 2$。

7.2.3 宇宙时空的度规

物理学上的"点"不是虚无的、想象的,而是有实际意义、有所寄托的,宇宙学中的"点"并不是指地球、太阳这样的星体代表的点,而是指星系代表的点。很显然,地球与太阳,太阳与银河系的地位并不平等。在宇宙学中不考虑细节,在 pc 量级的区域内平均,抹掉小尺度上的弯曲和不均匀,将集中在星云、星系、星系团等天体系统上的物质平均分布在空间中得到均匀分布的宇宙。宇宙学里物质的"大质元",就是在这种平均基础上宇观小尺度宏观大尺度上物质的全体,它们坐落在各个星系上,即宇宙学的点上,随星系自由运动。

在每个质元上放置标准钟计量时间,宇宙演化过程中某些参量如密度、温度随时间单调变化,反过来可以用密度等参数确定时间标准。由宇宙学原理,各质元(即各点)上观察者彼此平权,可选任意质元为中心建立坐标系,看到的、描述的应该是宇宙相同的演变过程、相同的历史,也就是相同的物理图景,即相同的物理参数,由此可以得到结论:**各质元上标准钟的走时快慢是相同的,因此各质元上的标准钟也就是坐标钟**,也就是宇宙中共同的时间标准,即前面提到的宇宙时记为 t。这是由宇宙学原理得到的关于宇宙时空的另一个重要结论。反过来,宇宙学原理以存在宇宙时为前提,如果约定当密度达到 ρ^* 时对应的宇宙时为 t^*,就可将各质元上的宇宙钟(标准

---

① 俞水强. 物理, **27** (5): 259 (1998).

钟、坐标钟)调整同步。

由于宇宙空间的均匀各向同性,宇宙在确定时刻是曲率为常数的三维常曲率空间,可以看作包容在一个四维平直空间里的三维球面。设四维平直空间坐标为$(x、y、z、\xi)$,二点距离元为

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + d\xi^2 \qquad (7.2.4)$$

球面上各条曲线的曲率半径都相同,设为ρ。由高斯曲率的定义式(6.2.11)式,ρ与该球面的高斯曲率$K(t)$的关系为$\rho^2=1/K(t)$。这样高斯曲率为$K(t)$的常曲率宇宙空间写成球面方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 + \xi^2 = \rho^2 = \frac{1}{K(t)} \qquad (7.2.5)$$

以下简记$K(t)=K$,在确定的时刻K为常数。由(7.2.5)式得

$$d\xi^2 = (d\xi)^2 = \left[\frac{1}{2\xi}d(x^2 + y^2 + z^2)\right]^2$$

$$= \frac{K[d(x^2 + y^2 + z^2)]^2}{4[1 - (x^2 + y^2 + z^2)K]}$$

将$d\xi^2$代入(7.2.4)式中,换成球坐标(r,θ,φ)

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

则

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + \frac{Kr^2dr^2}{1 - Kr^2}$$

$$= \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \qquad (7.2.6)$$

定义:

$$\frac{1}{K(t)} = \frac{R^2(t)}{k}$$

其中 $R(t)$ 为实函数，称为宇宙尺度因子；k 称为符号因子，只能取 0、±1

$$k = \begin{cases} +1, & K > 0 \quad 正曲率 \\ 0, & K = 0 \quad 平坦空间 \\ -1, & K < 0 \quad 负曲率 \end{cases}$$

定义：无量纲坐标 u

$$u = \frac{r(t)}{R(t)} \tag{7.2.7}$$

注意以上讨论都是取特定时刻 t，则 $R(t)$ 为常数，于是

$$\mathrm{d}r = R\mathrm{d}u$$

将以上关系式代入(7.2.6)式得到

$$\mathrm{d}\sigma^2 = R^2(t)\left[\frac{\mathrm{d}u^2}{1 - ku^2} + u^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)\right] \tag{7.2.8}$$

$(u、\theta,\varphi)$ 构成一个特殊的适合宇宙特点的空间坐标系。在这个坐标系中，每个大质元都有其特定的不随时间改变的 u 坐标，可以由哈勃定律证明。

为理解坐标系 $(u、\theta,\varphi)$，可以想象一个柔性网格，大质元坐落在格点上，每个格点的径向位置用该格点到中心跨过的格数——格点坐标来确定，柔性网可以向外拉开，每个质元都远离中心而去，但质元的格点坐标并不改变。这个格点坐标就类似于此处的坐标。

坐标系 $(u、\theta,\varphi)$，随着质元的运动而不断涨大，好像是被质元拽着走，称为随动坐标系或共动坐标系，涨大的比例由 $R(t)$ 决定，或者说宇宙的变化就是 $R(t)$ 的变化，所以 $R(t)$ 称为宇宙尺度因子。有关宇宙的动力学方程就是关于 $R(t)$ 的微

分方程。

对四维时空，由于宇宙时 t 既是坐标时又是标准时（固有时），所以

$$g_{00} = 1 \tag{7.2.9}$$

时空线元为

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt^2 - d\sigma^2 \\ &= c^2 dt^2 - R^2(t)\left[\frac{du^2}{1-ku^2} + u^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right] \end{aligned} \tag{7.2.10}$$

这个度规叫罗伯逊-沃克尔（Robertson-Walker）度规，简称为 R-W 度规。只要承认宇宙学原理，宇宙的时空度规就是 R-W 度规。度规中 $R(t)$ 和 k 是未知的，因此度规未完全确定，考虑了宇宙物质分布后由场方程才可确定 $R(t)$、k，即完全确定宇宙的度规。

R-W 度规是用广义相对论讨论天体、宇宙问题的基础。下面用 R-W 度规讨论径向真实距离及宇宙的有限性。

由（7.2.8）式，径向（$d\theta = d\varphi = 0$）的线元 dl 为

$$dl(t) = R(t)\frac{du}{\sqrt{1-ku^2}} \tag{7.2.11}$$

所以坐标为 u 的质元在 t 时刻到原点的真实距离为

$$l(t) = R(t)f(u) \tag{7.2.12}$$

其中

$$f(u) = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-ku^2}} \tag{7.2.13}$$

坐标为 u 的质元的速度为

$$v(t) = \frac{dl}{dt} = \dot{R}f(u) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}l(t)$$

这正是哈勃定律。与（7.2.3）式比较，哈勃系数

$$H(t)=\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \tag{7.2.14}$$

积分(7.2.13)式得

$$f(u)=\begin{cases}\sin^{-1}u, & k=+1\\ u, & k=0\\ \mathrm{sh}^{-1}u, & k=-1\end{cases} \tag{7.2.15}$$

由此可知,(1)当 $k=+1$ 时,对 u 有限制:$u\leqslant 1$,$u_{max}=1$,则

$$l_{max}=\frac{\pi}{2}R(t)$$

(2)当 $k=0,-1$ 时,对 u 无限制。

如果 $u\ll 1$,即距离不是很大时,无论 k 为何值,都有

$$f(u)\approx u,\quad l\approx uR=r \tag{7.2.16}$$

因此,在距离不是很大时,真实距离近似为坐标距离,这也正是牛顿力学情况。

7.3 大爆炸宇宙学简介

按宇宙学原理,任选宇观的大质元作为中心 O 建立起宇宙坐标系(ct,u,θ,φ),采用 R-W 度规,由宇宙的物质分布和运动求解爱因斯坦场方程,得到宇宙的运动微分方程,以此为基础讨论宇宙的演化和物质的形成,这就是大爆炸宇宙学的主要内容。

宇宙诞生后,处于极高温状态,除光子等静止质量为零的辐射粒子外,静止质量不为零的实物粒子的热运动能量(以 KT 为标志)远远大于其静止能 m_0c^2,于是这些实物粒子的静止能可以忽略,总能 $E\approx Pc$(P 为其动量),成为像光子一样的速度接近 C 的辐射粒子,称之为极端相对论物质或辐射物质。此时光子碰撞可以产生这样的正、负粒子对,粒子对湮灭

也可产生光子，即粒子与光子达到热平衡。辐射物质密度用 ρ_r 表示。随着温度的下降，某些粒子的热运动动能小于静能，即 $KT<m_0c^2$，则该粒子不再参与光子的热平衡，其运动速度远远小于光速 c，称之为非相对论性物质，简称物质。物质的密度用 ρ_m 表示。宇宙早期 $\rho_r>\rho_m$，是辐射为主时期。大约到 $t=10^{12}$ s$\approx 10^4$ 年时 $\rho_r=\rho_m$，以后 $\rho_r<\rho_m$，进入物质为主时期。物质为主时期最长，宇宙的年龄由此决定。到了现代 $\rho_r\ll\rho_m$，光子温度亦即微波背景辐射温度为 2.7 K。

7.3.1 宇宙动力学方程

1. 物质为主时期的宇宙动力学方程

物质为主时期宇宙动力学方程可由牛顿理论得到。应用牛顿理论时，空间是平直的，距离为真实距离 l。考虑距 O 点真实距离 l 处质元 m，其无量纲坐标为 u，见图 7.3.1。由于密度均匀，各向同性，所以 m 只受半径为 l 的球体内物质 M 的引力。由哈勃定律，质元速度正比于它到中心的距离，所以运动过程中各质元间距离不断增大，球体半径也在增大，但球体内质元速度都小于 m 质元速度，球体内质元不会超出球面；而球面外质元速度都大于 m 质元速度，球体外质元也不会进入球面。因此运动过程中球体内质量 M 保持不变。由牛顿力学和万有引力定律，有 $m\ddot{l}=-GMm/l^2$。将 $M=4\pi\rho l^3/3$ 代入得

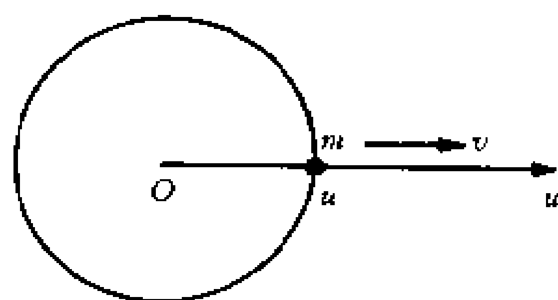


图 7.3.1

$$\ddot{l}(t)=-\frac{4}{3}\pi G\rho(t)l(t) \qquad (7.3.1)$$

牛顿理论是引力的近似理论，只有在宇观较小尺度内才

近似成立，由上节知，在这样范围内，$l \approx uR$，代入上式得

$$\ddot{R}(t) = -\frac{4}{3}\pi G\rho(t)R(t) \tag{7.3.2}$$

这就是物质为主时期宇宙动力学方程，与爱因斯坦场方程推导出的方程完全相同。表面上看这个结果似乎不可思议，因为宇宙极大，远处的星系退行速度接近光速，牛顿理论并不适用，怎么能由牛顿理论得到正确结果？实际上这个结果体现了宇宙学原理。牛顿理论可以研究宇宙小区域的运动，而宇宙的运动是整体相关的运动，具体表现在(7.2.7)式中存在一个宇宙尺度因子，将整体运动与局部运动联系起来。另外，(7.3.2)式表示的也不再是通常牛顿理论中表示的质点运动，而表示宇宙的整体运动。

如上所述，半径为 l 体积为 V 的球体内质量 M 为常数，所以 t 时刻质量密度

$$\rho(t) \propto V^{-1} \propto l^{-3} \propto R^{-3}$$

$$\rho R^3 = 常数 = \rho_0 R_0{}^3 \tag{7.2.3}$$

其中 ρ_0、R_0^3 分别为现在$(t=t_0)$宇宙的质量密度和宇宙尺度因子，代入(7.3.2)式得

$$\ddot{R}(t) = -\frac{4}{3R^2}\pi G\rho_0 R_0{}^3$$

由 $\ddot{R}(t)=\frac{\mathrm{d}\dot{R}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\dot{R}}{\mathrm{d}R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\dot{R}\frac{\mathrm{d}\dot{R}}{\mathrm{d}R}$代入上式得

$$\dot{R}\,\mathrm{d}\dot{R} + \frac{4}{3R^2}\pi G\rho_0 R_0^3 \mathrm{d}R = 0$$

即

$$\mathrm{d}\left(\frac{\dot{R}^2}{2} - \frac{4}{3R}G\rho_0 R_0^3\right) = 0$$

所以

$$\dot{R}^2(t) - \frac{8}{3R(t)}\pi G\rho_0 R_0^3 = \dot{R}^2(t) - \frac{8}{3}\pi G\rho(t)R^2(t)$$

$$= \text{常数} \qquad (7.3.4)$$

由爱因斯坦场方程得到的相应关系式为

$$\dot{R}^2(t) - \frac{8}{3R(t)}\pi G\rho_0 R_0{}^3 = \dot{R}^2(t) - \frac{8}{3}\pi G\rho(t)R^2(t)$$

$$= -kc^2 \qquad (7.3.5)$$

其中k为符号因子。比较(7.3.4)和(7.3.5)两式，牛顿理论结果所差的是不能确定常数的数值。这是可以理解的，因为常数涉及的是宇宙整体性质，牛顿理论是不可能解决的。

2. 辐射为主时期的宇宙动力学方程

由于辐射物质的状态方程与物质状态方程不同，而且宇宙高温、高密度，所以辐射物质为主时期动力学方程不能用牛顿理论推导，必须用广义相对论的场方程直接推导。结果第一个二阶导数方程为

$$\ddot{R}(t) = -\frac{8}{3}\pi G\rho(t)R(t) \qquad (7.3.6)$$

与物质为主的相应方程(7.3.2)式比较，只是系数差2倍，方程的内在本质不变。

第二个方程即一阶导数的方程，与(7.3.5)式相同，只是在宇宙早期R较小时，kc^2项可以忽略，为

$$\dot{R}^2(t) = \frac{8}{3}\pi G\rho(t)R^2(t) \qquad (7.3.7)$$

下面在上述宇宙动力学方程的基础上，结合其他一些知识，讨论宇宙的演化和物质的形成。

按大爆炸宇宙学，宇宙诞生于"奇点"的爆炸，取此时为$t=0$。在$t<10^{-44}$ s时，温度极高，宇宙尺度极小，$R\to 0$，量子效

应不能忽略，经典的引力理论——广义相对论不适用。现在正在发展量子引力理论试图研究这段时期的宇宙。估计这段时间内宇宙处于量子混沌状态，分不出时间和空间，只有统一的相互作用——超引力或称超力。

按大统一理论，宇宙从对称的真空态演变而来，在 $t=10^{-44}$ s 时真空发生相应于超统一的相变，出现时间和空间，从此可以应用经典的引力理论——广义相对论。首先是辐射为主时期，各种粒子和物质逐步产生，到 10^{12} s $\approx 10^{4}$ 年时辐射物质和物质的密度相等，然后进入物质为主时期。

7.3.2 辐射为主时期的宇宙——宇宙的早期历史和演化

下面讨论 $t>10^{-44}$ s 辐射为主时期宇宙的演化。

1. 真空相变

如上所述宇宙从真空态演变而来，在演变过程中，真空相变起了决定性作用。从现代观点看，真空并不空，宇宙就是从对称的真空态演变而来。真空态并不惟一，有多种不同的真空态，真空态能量 E 与场强 σ 的关系如图 7.3.2 所示。以临界温度 T_c 为界，曲线分为两种不同形式：$T>T_c$ 时真空稳定态（E 的极小值处）为 $\sigma=0$，是完全对称状态；当温度降低到 T_c

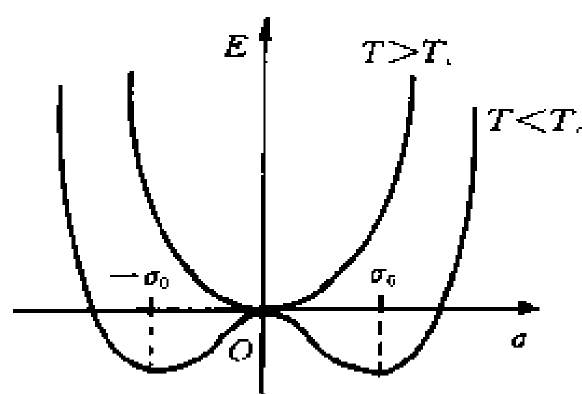


图 7.3.2　真空态的 E-σ 曲线

之下时发生突变，稳定真空态为$\pm\sigma_0$处，每一个稳定态不再具有左、右对称性，即发生了对称性破缺，称之为从对称相到对称破缺相的相变，即真空相变。估计在$t=10^{-44}$ s时发生超统一相变，出现了时间和空间。估计在$t=10^{-36}$ s、$T=10^{28}$K时发生相应于大统一的真空相变(这期间发生了暴胀，见下面)。相变之后从对称过渡到不对称，这就是宇宙不对称的起源。相变中放出的能量转变为辐射和粒子——夸克、轻子和各种场量子，这就是宇宙中物质的起源。辐射和粒子处于热平衡之中，是极端相对论情况，此时电磁作用和弱作用没有分开，宇宙中只有三种作用。磁单极子也在此期间形成，只是数目极少。估计在$t=10^{-10}$ s、$T=10^{15}$ K时发生弱电真空相变，出现弱相互作用和电磁相互作用，如图7.3.3所示。

2. 暴胀

80年代，为了解决大爆炸宇宙学的早期宇宙疑难，把近代试探性的粒子理论用于宇宙学，提出了暴胀理论。

按暴胀理论，在$t=10^{-36}$ s时要发生大统一相变，但相变要穿过一个又宽又高的势垒，所以相变并未马上发生，而是保持在$\sigma=0$的对称态迅速膨胀冷却，R随时间按指数加速增长，这在整个宇宙演化过程中是惟一的，其他阶段R都是减速增长，故称此阶段为暴胀。暴胀大约持续10^{-32} s，R增大43个量级，直到$T=10^{20}$K时暴胀结束，过渡到对称破缺相，完成大统一相变。暴胀过程虽然短暂，但对今天宇宙产生了决定性影响，可以解决一系列大爆炸宇宙学的难题。

首先是今天宇宙的均匀各向同性的起源问题。当前宇宙的均匀和各向同性显然应该来自早期宇宙的均匀和统一。现在考虑$t=10^{-40}$s时的宇宙，它是在大统一相变之前。当时的具有统一性的尺度即彼此关联的区域尺度可以用光信号传播

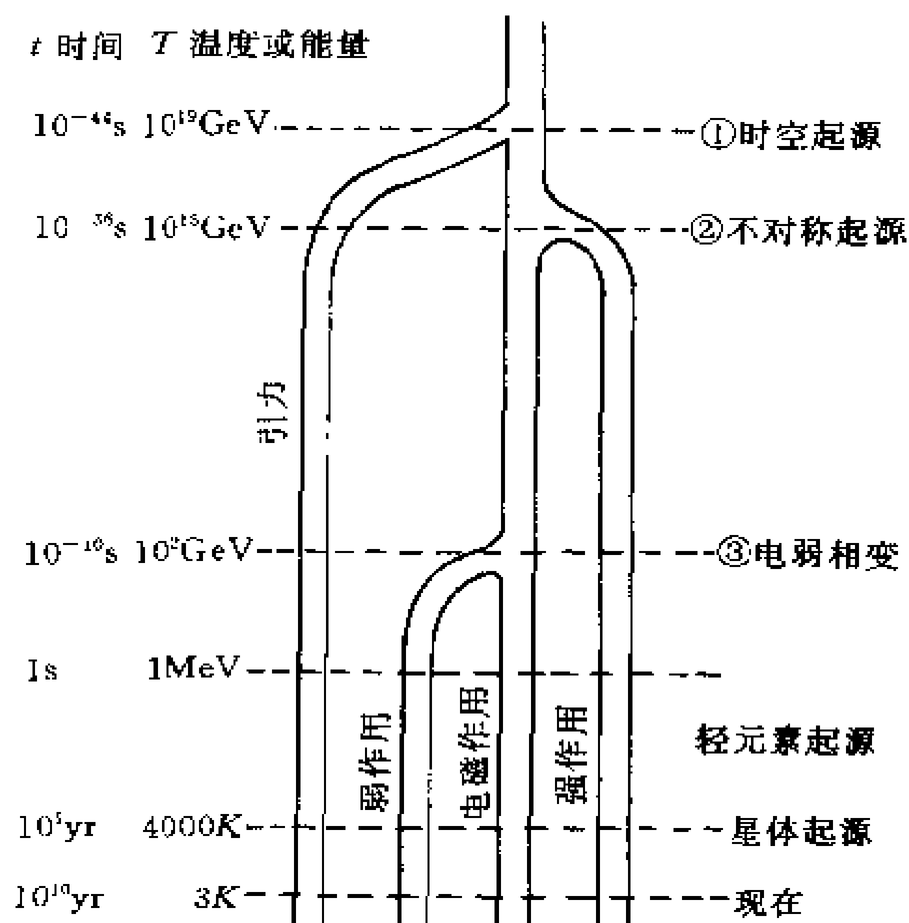


图 7.3.3 宇宙的演化及四种相互作用的产生

距离来估计。设 $t=0$ 时宇宙同一，到 $t=10^{-40}$s 时具有同一性的区域尺度约为 $ct\approx10^{-32}$m。当时宇宙大小可以用今天宇宙的大小倒推出来。从后面可以知道，在物质为主时期若符号因子 $k=0$ 则 $t\propto R^{\frac{3}{2}}\propto l^{\frac{3}{2}}$，$l$ 为宇宙的大小；辐射为主时期 $t\propto R^2\propto l^2$。由于物质为主时期远远超过辐射为主时期，所以近似 $t\propto l^{\frac{3}{2}}$。取当前宇宙年龄 $t_0=10^{18}$ s 以及当前宇宙大小 $l_0=10^{10}$ pc$\approx10^{26}$m，则 $t=10^{-40}$s 时宇宙大小为

$$l=\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}}l_0\approx10^{-13}\text{m}\gg ct$$

即当时的宇宙彼此不可能关联，因为宇宙的大小已远远超过

可以用光信号联系的区域 ct。这样就不可能发展到今天均匀的各向同性的宇宙。这是对大爆炸宇宙学的著名的责难，考虑暴胀之后，$t=10^{-46}$ s 时宇宙要比刚才估算的(未考虑暴胀)的大小 l 小 43 个量级，则当时的宇宙实际大小 l' 为

$$l' = 10^{-43} l \approx 10^{-56}\mathrm{m} \ll ct$$

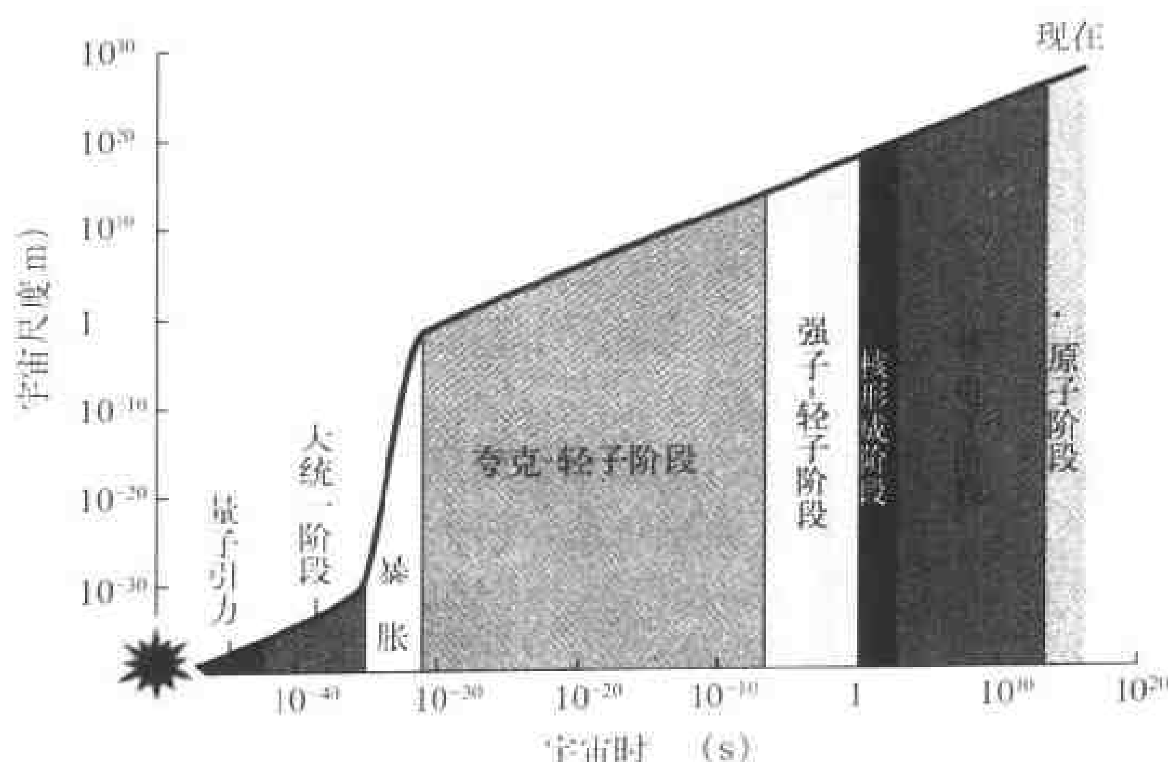
说明当时的宇宙彼此紧密关联，处于高度的统一之中，这样发展到今天，宇宙才是如此均匀。

其次在大爆炸模型中 t 时刻物质密度 $\rho(t)$ 与当时的临界密度 $\rho_c(t)$ 之间没有必然的联系，各种关系都是可能的(临界密度 $\rho_c(t)$ 的定义见后面关于宇宙未来的讨论。宇宙的三种前景取决于宇宙的密度是大于、等于、小于临界密度 $\rho_c(t)$)。但从当前宇宙情况推测 $\rho(t)\approx\rho_c(t)$，这种恰好相等的关系很难理解。在暴胀理论中有 $\rho(t)$ 趋于 $\rho_c(t)$ 的机制，一个纯粹的真空暴胀使真空能密度等于 $\rho_c(t)$，因此只要有足够的真空暴胀就可以使 $\rho(t)=\rho_c(t)$。反过来当今宇宙是否有 $\rho_0=\rho_c$ 的关系，也是检验暴胀理论是否正确的关键。

暴胀理论还指出磁单极数目接近于零，解释了今天观察不到磁单极的事实。

图 7.3.4 画出宇宙从大爆炸开始，经历量子混沌、大统一、暴胀阶段，从“一无所有”的真空，产生出夸克、轻子、强子、核、原子、星系……最后发展到现在的一系列时间历程以及相应的宇宙尺度。

产生基本粒子，然后生成各种层次物质结构的过程，主要取决于宇宙的温度。宇宙发展的阶段与宇宙温度的关系，构成宇宙的热历史。



图[1]7.3.4 膨胀宇宙各个阶段的时间历程以及相应的宇宙尺度

3.膨胀宇宙的热力学

上面的讨论主要是应用力学理论,热力学理论在宇宙学中也有重要应用。

热力学第二定律建立之后,很快就应用到宇宙,当时认为宇宙是孤立的、静止的,于是按热力学第二定律,宇宙的未来将是温度均匀的平衡态,然后一成不变地维持下去,宇宙成为死寂的一片,这就是有名的热寂说给人们描绘的宇宙的未来。死寂的宇宙前景在百年前的欧洲引起很大震惊,有位作家说:那时一位对热力学第二定律一无所知的人文学者和一位对莎士比亚著作一无所知的科学家同样地糟糕。热寂说与进化论、

① Beiser, A., *Concepts of Modern Physics*, Fifth Edition, McGraw-Hill Inc. (1995).

演化论相对立，后者主张自然界向有序、多变、生动的方向发展，也正是我们周围世界的实际演化情况。大爆炸宇宙学指出热寂说的根本错误在于，宇宙并非静止而在不断膨胀运动，因此也就不可能达到热力学第二定律所指的静止状态下的热平衡态。

在宇宙从无序向有序的变化中，引力起了决定性的作用。无引力的体系将从有序变化到无序，最后是均匀一片；有引力的体系，原来的无序的均匀分布由于涨落而出现不均匀，从无序到有序，前面所述的星体的诞生正是这样的过程。有引力的宇宙体系为负热容，不可能达到热平衡，即使处于热平衡也是不稳定的。

下面讨论宇宙的热力学过程，整个宇宙进行的是绝热过程，以原点为中心取球形区域，体积 $V \propto R^3$。由于宇宙处处均匀，所以此球形区域的热力学过程也是绝热的。设 E 为系统内能，由热力学第一定律

$$\mathrm{d}E = -P\mathrm{d}V \tag{7.3.8}$$

(1)对辐射（极端相对论性物质）

由黑体辐射规律知，辐射压强与单位体积辐射能 ε_r 和辐射温度 T_r 的关系为

$$P_r = \frac{1}{3}\varepsilon_r, \quad \varepsilon_r \propto T_r^4 \tag{7.3.9}$$

脚标“r”表示辐射参量。于是 $E_r = V\varepsilon_r$，代入(7.3.8)式

$$\varepsilon_r \mathrm{d}V + V\mathrm{d}\varepsilon_r = -\frac{1}{3}\varepsilon_r \mathrm{d}V, \quad \frac{\mathrm{d}\varepsilon_r}{\varepsilon_r} + \frac{4}{3}\frac{\mathrm{d}V}{V} = 0$$

由此得 $\varepsilon_r V^{\frac{4}{3}}=$常数，于是有 $\varepsilon_r R^4=$常数。考虑(7.3.9)式后有

$$T_r R = \text{常数} \tag{7.3.10}$$

这是一个很重要的关系式，表示在辐射为主时期，宇宙演化过

程中辐射温度与宇宙尺度因子的关系。

由爱因斯坦质能关系得 $\epsilon_r = \rho_r c^2 \propto \rho_r$，这样由 $\epsilon_r R^4 =$ 常数得

$$\rho_r R^4 = 常数 \tag{7.3.11}$$

注意这个关系与物质的相应关系(7.3.3)式($\rho_m R^3 =$ 常数)不同。考虑(7.3.10)式有

$$\rho_r T_r^{-4} = 常数 \tag{7.3.12}$$

将(7.3.11)式代入(7.3.6)式后积分就可以得到(7.3.7)式，所差的是不能确定积分常数。将(7.3.11)式两边微分得

$$R^4 \mathrm{d}\rho_r + 4R^3 \rho_r \mathrm{d}R = 0$$

将此式代入开方后的(7.3.7)式积分

$$\int_{\infty}^{\rho_r} - \frac{\mathrm{d}\,\rho_r}{4\sqrt{\rho_r^3}} = \int_0^t \sqrt{\frac{8\pi G}{3}}\mathrm{d}t$$

得到

$$t = \sqrt{\frac{3}{32\pi G \rho_r}} = \sqrt{\frac{3}{32\pi G \Theta}} R^2 \tag{7.3.13}$$

其中第二步利用了(7.3.11)式，Θ 为(7.3.11)式中的常数。

这里我们得到了在辐射为主时期 $t \propto R^2$ 的关系，这个关系在暴胀过程的讨论中已经用到。

由(7.3.12)式和(7.3.13)式得到在辐射为主时期，宇宙演化过程中辐射密度和辐射温度与宇宙时 t 的关系

$$t \propto \rho_r^{-\frac{1}{2}} \propto T_r^{-2} \tag{7.3.14}$$

更详细的定量讨论要以粒子理论出发，看各种粒子在什么温度下对辐射有贡献以及贡献的大小，得到宇宙的热历史年表(见表 7.3.1)。

表 7.3.1　宇宙热历史

宇宙时 t(s)	光子温度 T(K)	热运动能量 KT(eV)	特　　征	主要物理过程
10^{-44}	10^{32}	10^{19}G	量子引力时期结束	
10^{-36}	10^{28}	10^{15}G	粒子大统一开始破缺	粒子过程
10^{-12}	10^{16}	10^{3}G		粒子过程
10^{-10}	10^{15}	10^{2}G	弱电统一开始破缺	粒子过程
10^{-6}	10^{13}	1G	强子开始形成	粒子过程
10^{-4}	10^{12}	10^{2}M		核过程
10^{0}	10^{10}	1M		核过程
10^{2}	10^{9}	0.1M	轻原子核形成	核过程
10^{12}	4×10^{3}	0.1	中性原子形成	原子过程
10^{17}	10	10^{-3}	最早星系形成	引力过程
10^{18}	2.7	3×10^{-4}	现在	引力过程

(2)对物质(非相对论性物质)

在宇宙早期辐射为主,也同时存在物质。这两种物质(相对论性和非相对论性物质)的性质很不相同,在宇宙演化过程中它们随 t、R 变化的关系也不相同。下面用类似的方法讨论物质的相应关系式。

物质的单位体积能为

$$\varepsilon_m = \varepsilon_0 + \varepsilon_K = \varepsilon_0 + \frac{3}{2}nKT_m$$

其中 ε_0、ε_K 分别为物质单位体积的静能和热运动动能。对单个粒子热运动动能为(当作单原子理想气体)$\varepsilon_K = \frac{3}{2}nKT_m$,$n$ 为单位体积粒子数。于是上述球形区域中物质的总能量为

$$E_m = V\varepsilon_m = V\left(\varepsilon_0 + \frac{3}{2}nKT_m\right) \qquad (7.3.15)$$

在体积 V 膨胀过程中粒子总数不变,所以其静能 $V\varepsilon_0$ 为

常数。此外其压强(当作理想气体)为

$$P_m = nKT_m \tag{7.3.16}$$

将上述两式代入(7.3.8)式得$\frac{3}{2}nK\mathrm{d}(VT_m) = -nKT_m\mathrm{d}V$,于是

$$\frac{\mathrm{d}T_m}{T_m} + \frac{5}{3}\frac{\mathrm{d}V}{V} = 0, \quad T_mV^{\frac{5}{3}} = 常数$$

即

$$T_mR^5 = 常数 \tag{7.3.17}$$

显然这个关系和辐射的相应关系(7.3.10)式不同,即两类不同物质的温度随 R 的变化规律不同,T_m 的变化要快得多。当然(7.3.17)式的成立是有条件的,要求物质处于热平衡,并且绝热。

4. 核的形成与氦的丰度

天体中 H、He 最多,两者之和占总质量的 99%,其中 He 的丰度(指其质量占总质量的百分比)在 0.25~0.30 之间,在天体上分布得相当均匀。下面由 He 形成的机制推论其丰度。

He 是在 $t=1\sim100$ s 内形成的。由前面所述,当粒子静能 $m_0c^2 \leqslant KT_r$ 时,该粒子与光子可以相互转换处于热平衡。令

$$T_c = m_0c^2/K$$

称为该粒子的临界温度,$T>T_c$ 时该粒子与光子处于热平衡,$T<T_c$ 时该粒子与光子脱离热平衡。中子、质子的临界温度约为 10^{13}K。当 $T<10^{13}$K 时中子、质子不再与光子达热平衡。但此时正、负电子与光子保持热平衡,数目与光子数差不多,它们与中子、质子相碰,可以使质子、中子之间相互转换,因此中子、质子系统自己处于热平衡。中子、质子数目按玻尔兹曼分布,即粒子数 N 与粒子的能量 ε 和热平衡温度 T 有下述关系

$$N \propto e^{-\varepsilon/KT} = \exp(-\varepsilon/KT)$$

直到温度降到电子临界温度 5×10^9K，正、负电子不再与光子热平衡，正、负电子湮灭后数目大大减少，不再能使中子、质子相互转换，于是中子、质子的相对数目基本保持不变，冻结在电子临界温度附近的 T_f 温度的热平衡比例下。由当前实测的核子数密度推断当时的核子数密度，再假定轻子和中微子只有三类，于是由弱相互作用理论算出 $KT_f=0.7$ MeV（$T_f\approx8\times10^9$ K）。由于中子、质子的质量不同：$m_n-m_p=2.3\times10^{-30}$ kg，它们的能量也不同：$\varepsilon_n-\varepsilon_p=(m_n-m_p)c^2=1.3$ MeV，所以按 T_f 温度下的玻尔兹曼分布求出中子、质子的粒子数的比为

$$\begin{aligned} N_n : N_p &= \exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{KT_f}\right) : \exp\left(-\frac{\varepsilon_p}{KT_f}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\varepsilon_n-\varepsilon_p}{KT_f}\right) \\ &\approx 1:6 \end{aligned} \tag{7.3.18}$$

这个比例就是冻结以后的中子、质子数之比，也就是由宇宙演变推论的当前宇宙中中子、质子数之比。

当 T 下降到 10^9 K 左右，中子、质子结合成 ^{2}H 再形成 He，当中子、质子全部结合生成 He 后，剩下的质子生成 H。由于 1 个 He 中有 2 个中子，所以 He 的总数为 $N_{He}=\frac{1}{2}N_n$，He 的质量为 $4m_p$；中子、质子的总质量为 $(N_n+N_p)m_p$，所以 He 的丰度为

$$X=\frac{(N_n/2)\cdot 4m_p}{(N_n+N_p)m_p}=\frac{2N_n/N_p}{1+N_n/N_p}=0.29$$

考虑到中子半衰期为 10 分钟，He 丰度要比 0.29 小一些。类似可推测其他核的丰度，1991 年 G. Steigman 等人按最

新的核反应截面数据计算了一些核的丰度，与实验值非常符合。

核	H	^2H	^4He	^3He	^7Li
丰度	0.74	10^{-4}	0.24	10^{-4}	10^{-10}

由此还可推断当前重子类物质质量密度约为 6×10^{-31} g/cm^3。

产生元素形成核时温度为 $10^9\sim10^{10}$K，此时仍是辐射为主时期，在温度很高的大火球中飘浮着物质粒子构成等离子体，对辐射不透明。

此后，在 $t\approx10^{12}$ s $\approx10^4$ y，$T_r\approx10^4$K 时，$\rho_r=\rho_m$ 开始由辐射为主时期转变为物质为主时期，在此时期 $KT\approx1$ eV，中性原子形成，光子与原子为弹性碰撞，从而中性原子与光子脱耦，物质对辐射透明，原子气体与光子气体成为两种独立成分，辐射保持黑体辐射性质，成为宇宙的微波背景辐射，这是大爆炸宇宙的重要预言之一。伽莫夫注意到今天的背景辐射温度与 He 的丰度密切相关，从而在 1948 年预言 10 K 的背景辐射，他的学生 Alpher 和 Herman 修正他的计算得到 5 K 背景辐射。1965 年贝尔实验室的彭齐亚斯和威尔逊（A. A. Penzias 和 R. W. Wilson）在不同时间和方向测到 $T=3.0\pm1.0$ K 的背景辐射。这个发现对宇宙学的影响只有哈勃的发现可以比拟。如果说哈勃的发现开启了探讨宇宙整体时空结构的大门，那么彭齐亚斯和威尔逊的发现开启了探求宇宙整体物理演化的大门，它极大地支持了大爆炸宇宙学模型。1989 年发射了宇宙背景辐射探索者卫星（COBE），测出在波长 0.05～0.5 cm 波段背景辐射是理想的黑体谱，偏离小于 0.03%，温度为 2.726 ± 0.01 K。

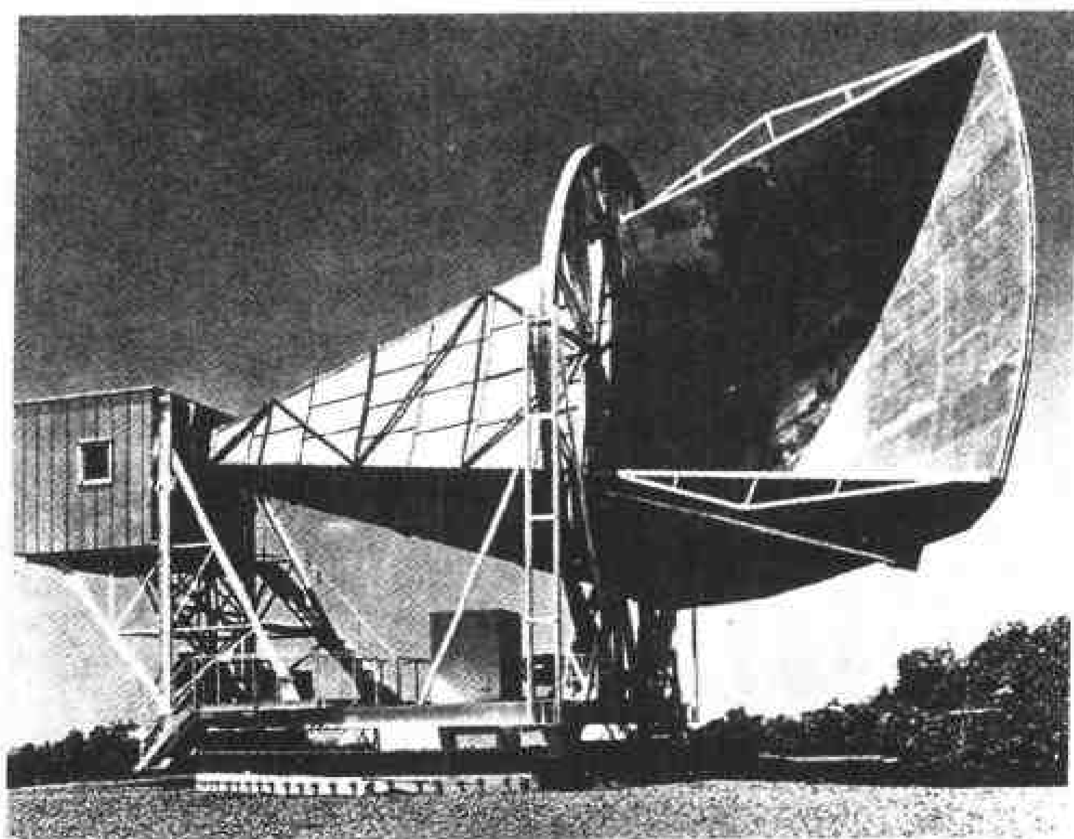


图 7.3.5　新泽西州小镇 Holmdel 上的 15 m 天线。1965 年彭齐亚斯和威尔逊用此天线第一次观测到微波背景辐射

图 7.3.5[①]是彭齐亚斯和威尔逊当年观测微波背景辐射所使用的喇叭形天线。安装在天线上的灵敏接受器使他们可以测出背景辐射。图 7.3.6 是实测的微波背景辐射的谱图(强度-波长分布图),其中包括彭齐亚斯和威尔逊的第一次测量结果。这个谱图表明,现在的微波背景辐射是 2.7 K 的黑体辐射。

以后宇宙处于物质为主时期。在 $T\approx10$ K, $t\approx10^{17}$ s 时,

---

① 取自 Arthur Beiser, *Concepts of Modem Physics*, Fifth Edition, McGraw-Hill Inc. (1995).

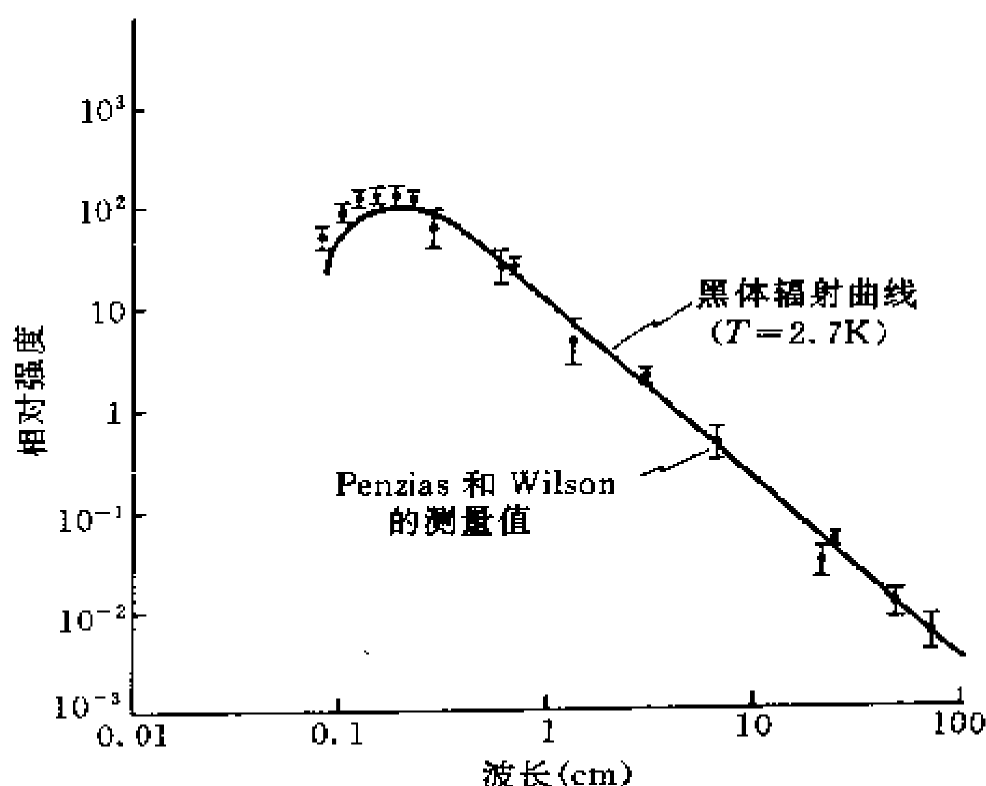


图 7.3.6　宇宙微波背景辐射谱。其中曲线是 2.7 K 黑体辐射的理论曲线。每个实测点的短线表示每次测量的误差范围

在引力作用下大尺度中性气体在力学上不稳定，微小的扰动引起局部坍缩聚集成团，从均匀中产生不均匀的结构，在一定条件下形成星系

7.3.3　物质为主时期的宇宙——宇宙的年龄和未来

辐射为主的时期只有 10^4 年，因此宇宙的年龄由物质为主的时期决定。而物质为主时期的发展和变化决定了宇宙的未来。

1. 宇宙的未来

由(7.3.5)式得

$$\dot{R}(t) = \left(\frac{8}{3R(t)}\pi G\rho_0 R_0^3 - kc^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (7.3.19)$$

因此，(1)当 $k=+1$ 时，要使被开方式不为负数，$R(t)$ 必须有上限。而且前面已经证明，当 $k=+1$ 时必有 $u_{max}=1$，宇宙最大真实距离为 $l_{max}=\frac{\pi}{2}R(t)$，所以在这种情况下宇宙始终有限、宇宙是有限的称为闭宇宙。(2)当 $k=0,-1$ 时，$R(t)$ 随时间无限增加，而且对 u 也无限制，所以宇宙的发展是无限的，分别称为平宇宙和开宇宙，相应的曲线画在图 7.3.7 中。对闭宇宙 R 有最大值 R_m，届时宇宙有最大半径(真实距离) $l_{max}=\frac{\pi}{2}R_m$，然后宇宙收缩，直到又收缩成奇点。对平宇宙和开宇宙，$R(t)$ 无限增加，宇宙无限。两者的区别在于，平宇宙 $k=0$，空间平坦；开宇宙 $k=-1$，空间弯曲，具有负曲率。

宇宙有以上三种可能的演变模式，实际的宇宙是这三种可能中的哪一种，可由宇宙的密度来判断，最方便的是讨论当前宇宙，即取 $t=t_0$，由(7.3.5)式得：

$$k=\frac{1}{c^2}\left(\frac{8}{3}\pi G\rho_0R_0^2-\dot{R}_0^2\right)=\frac{8\pi G}{3c^2}R_0^2(\rho_0-\rho_c) \tag{7.3.20}$$

其中 ρ_c 称为当前宇宙的临界质量密度

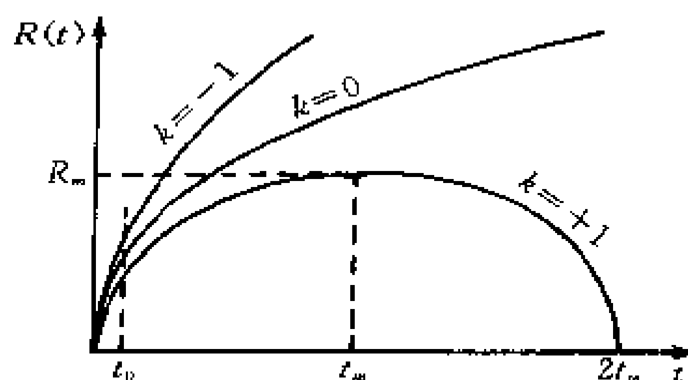


图 7.3.7 宇宙尺度因子与宇宙时的关系曲线

$$\rho_c=\frac{3}{8\pi G}\left(\frac{\dot{R}_0}{R_0}\right)^2$$

由(7.2.14)式 $H(t)=\frac{\dot{R}(t)}{R(t)}$,在当前就有

$$H_0=\frac{\dot{R}_0}{R_0} \tag{7.3.21}$$

于是

$$\rho_c=\frac{3H_0^2}{8\pi G}=0.5\times10^{-29}h_0^2(\mathrm{g/cm^3}) \tag{7.3.22}$$

这样比较 ρ_0 与 ρ_c 的大小就可以由(7.3.20)式判断符号因子 k,从而知道宇宙的未来:

$\rho_0>\rho_c$	则 $k=+1$	宇宙闭合有限
$\rho_0=\rho_c$	则 $k=0$	宇宙平坦无限
$\rho_0<\rho_c$	则 $k=-1$	宇宙开放无限

据奥尔特(J. H. Oort)考察,可以看到的星系物质(简称可视物质)质量密度约 $0.03\rho_c$。用动力学方法考察,宇宙中还有大量看不到的物质称为暗物质,按现在数据估计暗物质超过可视物质的 10 倍以上,人们倾向于认为总的质量密度 ρ_0 约等于 ρ_c。按后来兴起的暴胀理论推论 $\rho_0=\rho_c$,使 $\rho_0\approx\rho_c$ 的估计又多了一层理论上的依据,但这个估计对下面讨论的宇宙年龄问题有不利之处。暗物质包括看不见的气云、不发光的星体、黑洞等。但通过分析,以上物质对密度的贡献都小于可视物质的密度,按大爆炸宇宙学的演化分析,当今由重子构成的物质的密度有上限$(3\sim6)\times10^{-31}\mathrm{g/cm^3}$。因此构成暗物质的主体应该是一些微子,其中可能性最大的是中微子。前面已经讨论过,如果中微子具有静止质量,即使是电子的万分之一(现在的估计值)为 $6\times10^{-32}\mathrm{g/cm^3}$,则它对 ρ_0 的贡献达 2.4×

$10^{-29}\mathrm{g/cm^3}$，因此当前对中微子静止质量的研究结果将大大影响宇宙学。

2. 宇宙的年龄

由(7.3.5)式有

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=c\sqrt{\frac{R_m}{R}-k}$$

其中为了简化取 $R_m=\frac{8\pi}{3c^2}G\rho_0R_0^3=\frac{\rho_0}{\rho_c}\frac{H_0^2}{c^2}R_0^3$，$\rho_c$ 为当前临界密度。积分上式得到宇宙时与 R 的关系，其中积分下限取为 0。

$$t=\int_0^R\frac{\mathrm{d}R}{c\sqrt{\frac{R_m}{R}-k}}$$

得：

$$t=\begin{cases}\frac{R_m}{c}\left[\sin^{-1}\sqrt{\frac{R}{R_m}}-\sqrt{\frac{R}{R_m}\left(1-\frac{R}{R_m}\right)}\right] & k=+1\\ \frac{2R_m}{3c}\left(\frac{R}{R_m}\right)^{\frac{3}{2}} & k=0\\ \frac{R_m}{c}\left[\sqrt{\frac{R}{R_m}\left(1+\frac{R}{R_m}\right)}-\ln\left(\sqrt{\frac{R}{R_m}}+\sqrt{1+\frac{R}{R_m}}\right)\right] & k=-1\end{cases}\tag{7.3.23}$$

由此可见，对 $k=0$ 情况，$t\propto R^{\frac{3}{2}}$，这个结果在前文 7.3.2 中已经用到。前面图 7.3.7 就是按(7.3.23)式画出的。

当 $k=+1$ 时，取 $R=R_m$(最大宇宙尺度因子)，则由此式得到对应 R_m 的 t_m(图 7.3.7)

$$t_m=\frac{\pi}{2}\frac{1}{H_0}\frac{\rho_0/\rho_c}{(\rho_0/\rho_c-1)^{3/2}}$$

在(7.3.23)式中取 $R=R_0$，就得到现在宇宙的年龄 t_0。

(1) 当 $k=0$ 时，$\rho_0=\rho_c$，$R_m=\frac{H_0^2}{c^2}R_0^3$，则

$$t_0=\frac{2R_m}{3c}\left(\frac{R_0}{R_m}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\frac{1}{H_0}$$

(2) 当 $k=\pm 1$ 时，$\rho_0\neq\rho_c$，由(7.3.20)式

$$k=\frac{8\pi G}{3c^2}R_0^2(\rho_0-\rho_c)=\frac{H_0^2}{c^2}R_0^2\frac{\rho_0-\rho_c}{\rho_c}$$

若令 $\eta=\frac{\rho_0}{\rho_c}$，则

$$R_0=\frac{c}{H_0}\sqrt{\frac{k}{\eta-1}}$$

$$R_m=\frac{k\eta}{\eta-1}R_0=\frac{c}{H_0}\eta\left(\frac{k}{\eta-1}\right)^{\frac{3}{2}}$$

于是有结果

$$t_0=\begin{cases}\frac{1}{H_0}\frac{\eta}{(\eta-1)^{3/2}}\left[\sin^{-1}\sqrt{\frac{\eta-1}{\eta}}-\sqrt{\frac{\eta-1}{\eta}}\right], & k=+1,\ \eta>1\\ \frac{2}{3}\frac{1}{H_0}, & k=0,\ \eta=1\\ \frac{1}{H_0}\frac{\eta}{(1-\eta)^{3/2}}\left[\sqrt{\frac{1-\eta}{\eta}}-\ln\frac{\sqrt{1-\eta}+1}{\sqrt{\eta}}\right], & k=-1,\ \eta<1\end{cases}$$

(7.3.24)

由此可知，宇宙的年龄也取决于 ρ_0 与 ρ_c 的比值 η，并且与 H_0 密切相关。图 7.3.8 描绘了 η 对 t_0 的影响，其中 t_0 坐标的单位是$\frac{1}{H_0}$。注意在 $\eta=1$ 即 $k=0$ 处曲线是连续的。

下面由上述结果讨论宇宙年龄的上限。首先 $t_0\propto\frac{1}{H_0}=200h_0^{-1}$ 亿年，当前认为，$H_0\geqslant 60\ \mathrm{km\cdot s^{-1}\cdot Mpc^{-1}}$，所以 $h_0\geqslant$

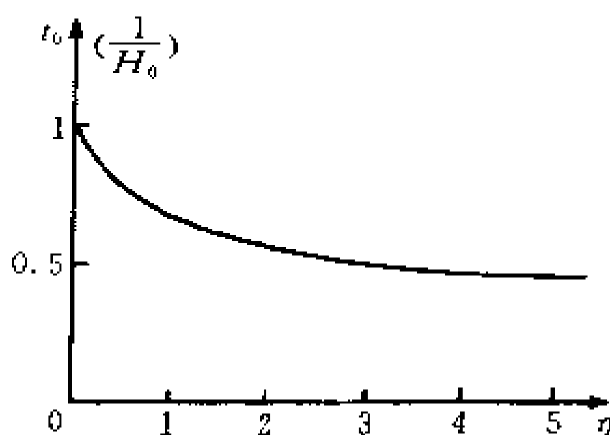


图 7.3.8 密度比 η 对宇宙年龄的影响

1.2。为估计宇宙年龄的上限，取 h_0 的下限 $h_0=1.2$。这样

若认为 $\eta\approx1(\rho_0\approx\rho_c)$，则 $t_0=\frac{2}{3}\frac{1}{H_0}\leqslant\frac{400}{3}h_0^{-1}$ 亿年 $=111$ 亿年

若取 η 的最小可能值 $\eta=0.2$，则由(7.3.24)式

$$t_0=0.85\frac{1}{H_0}\leqslant0.85\times200h_0^{-1}\text{亿年}\doteq141\text{亿年}$$

宇宙的实际年龄可以通过测定古老天体的年龄来估计，在天文学上有比较成熟的恒星演化理论来推测球形星团的年龄，结果的可信度较高，测定的误差约为 20%，当今的古老天体的测定值为 150±30 亿年，估计宇宙的年龄不小于 120 亿年。

与上述结果比较，按大爆炸宇宙模型讨论的宇宙年龄在 $\rho_0\approx\rho_c$ 情况下有些偏低，给 $\rho_0\approx\rho_c$ 的断言投下一丝阴影。当前对宇宙年龄的讨论和研究成为宇宙学的重点和热点，主要是从宇宙学模型本身以及 H_0 的测定等方面去研讨。

参 考 文 献

[1] 刘辽. 广义相对论. 高等教育出版社(1987).

[2] S. 温伯格[美]. 引力论和宇宙论. 邹振隆等译. 科学出版社(1980).

[3] 俞允强. 广义相对论引论. 北京大学出版社(1987).

[4] 吴大猷. 相对论——理论物理(第四册). 科学出版社(1983).

[5] 许良英等编译. 爱因斯坦文集(第一卷). 商务印书馆(1977).

[6] C. Moller. *The Theory of Relativity*(Second Edition). Clarendon Press, Oxford(1972).

[7] 李宗伟、肖兴华. 普通天体物理学. 高等教育出版社(1992).

[8] 方励之、(意)R. 鲁菲尼. 相对论天体物理的基本概念. 上海科学技术出版社(1981).

[9] 方励之、李淑娴. 宇宙的创生. 科学出版社(1987).

[10] 林忠四郎、早川幸男[日]. 宇宙物理学. 师华译. 科学出版社(1981).